Pré-Requis & Mise à Niveau Mathématiques du Secondaire

H. DERFOUL

Janvier 2018

- _ -

Sommaire

Avant propos 3
Chapitre 0 5
Pré-requis et mise à niveau 5
Partie II 5
II. Le polynôme du second degré 5
    1. Factorisation du trinôme du second degré 6
    2. Etude du signe du trinôme 7

Avant propos

Ce cours de mathématiques de mise à niveau - *Pre Requis &t Mise A Niveau De Mathematiques du Secondaire -* s'adresse aux élèves des classes des différents niveaux du secondaire scientifiques et aux élèves de la formation permanente ou des écoles professionnelles désireux de suivre le cours du niveau Certificat Mathématiques du Secondaire proposé.

***HANAFI DERFOUL** est Docteur en Sciences de l'Université Pierre & Marie Curie et enseignant de Mathématiques et Sciences Physiques en formation initiale et continue. Depuis avril 2017, il est collaborateur scientifique chez FORMACOURS, site de formation en ligne des Sciences & Informatique.*

J'ai appris par expérience, que la réussite dépend beucoup de la volonté et de la motivation de l'individu. La connaissance et la compétence, s'acquierent par un travail méthodique et régulier.
Par la persévérence et l'effort, le travail finira toujours par être récompensé.
Continuez et ne jamais baisser les bras ...
Bon courage !

Demain dites vous ...
il fera toujours jour !
-_-
Paris, janvier 2018

Chapitre 0
Pré-requis et mise à niveau
Partie II

II. Le polynôme du second degré

On appelle polynôme de degré n et de variable x, une somme de *(n+1)* monômes de degré inférieur ou égal à n, représentée par l'expression :

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \qquad \text{avec } (a_i \neq 0)\,,$$

où les coefficients a_i désignent des nombres réels.

Pour n=1, on obtient un polynôme du premier degré : $P_1(x)=a_1x+a_0$. C'est la forme affine de l'équation de la droite.

Pour n=2, on obtient un polynôme du second degré appelé aussi trinôme :
$P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$. La forme développée des identités remarquables classiques, $(x+a)^2$, $(x-a)^2$ et $(x+a)(x-a)$ font parties des polynômes du second degré.

Théorème

Deux polynômes $P_n(x)$ et $Q_m(x)$ de degré n et m respectivement sont dits *identiques* si et seulement si, *ils ont les mêmes coefficients*.

Exemple

Déterminer les coefficients réels a,b et c pour que :

$$P(x)=x^3+1=(x+1)(ax^2+bx+c).$$

Solution

Le développant de $(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(c+b)x+c$.

D'après le théorème précédent d'égalité de deux polynômes, on doit avoir:

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ c+b=0 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-a=-1 \\ c=-b=1 \\ c=1 \end{cases}.$$

P(x) s'écrit alors :

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1).$$

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à l'étude et à la factorisation des polynômes du second degré. Rappelons que le principe de la factorisation utilise la propriété de la distribution de la loi multiplicative (x) par rapport à la loi additive (+)., soit par exemple :
$ab+ac=a(b+c)$.

1. Factorisation du trinôme du second degré

Soit le polynôme du second degré à coefficients réels a, b et c suivant :

$$P(x)=ax^2+bx+c \text{ avec } a\neq 0.$$

La forme canonique de ce polynôme s'écrit :

$$P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

où $\Delta=b^2-4ac$ s'appelle le discriminant du polynôme P(x).

On distingue trois cas de discriminant :

- ***Discriminant*** $\Delta>0$

La racine carrée de Δ existe dans ce cas. Le polynôme P(x) se factorise sous la forme d'un produit de facteurs suivant :

$$P(x)= a(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}).$$

Dans cas les solutions de l'équation P(x)=0 sont données par deux valeurs distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Graphiquement, la courbe associée à P(x) est une parabole possédant un extremum en $x=-\frac{b}{2a}$. La courbe présente dans le cas où a>0 un minimum et pour a<0 un maximum. Les racines x_1 et x_2 représentent les points d'intersections de la courbe avec l'axe des abscisses 0x.

- ***Discriminant*** $\Delta=0$

P(x) s'écrit dans ce cas comme un carré parfait. Soit : $P(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2$.

Dans ce cas les solutions de l'équation P(x)=0 sont doubles et données par : $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

Contrairement au cas précédent, la courbe présente un seul point d'intersection avec l'axe des abscisse 0x.

- ***Discriminant*** $\Delta<0$

P(x) est dans ce cas la somme de deux carrés. Soit :

$$P(x)= a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2\right] \quad \text{avec}(-\Delta>0)$$

Dans cas P(x)=0 ne possède pas de solutions dans l'ensemble IR. Graphiquement la courbe ne possède aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses 0x.

***Exercice* : Somme et produit des racines**

Montrer que dans le cas où $\Delta\geq 0$, la somme et le produit des racines sont donnés respectivement par :

$$S=-\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad P=\frac{c}{a}.$$

En déduire que P(x) s'écrit dans ce cas : $P(x)=a(x^2-Sx+P)$.

Solution

Dans le cas ou $\Delta\geq 0$ en faisant la somme et le produit des racines on a :

$$S=x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{a}.$$
$$P=x_1x_2=(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})=\frac{c}{a}.$$

En faisant a en facteur dans l'expression de P(x), on a :

$$P(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}).$$

En introduisant S et P, on obtient l'expression demandée: $P(x)=a(x^2-Sx+P)$.

2. Etude du signe du trinôme

Le signe du trinôme P(x) *dépend du signe du discriminant* Δ. Dans le cas où Δ est positif, P(x) est du signe de a à l'extérieure des racines et de –a à l'intérieure. Par contre lorsque Δ est négatif ou nul, P(x) est du signe de a.