Plan du chapitre 8 :

FONCTION LINEAIRE & EQUATION DU 1ER DEGRE A UNE INCONNUE

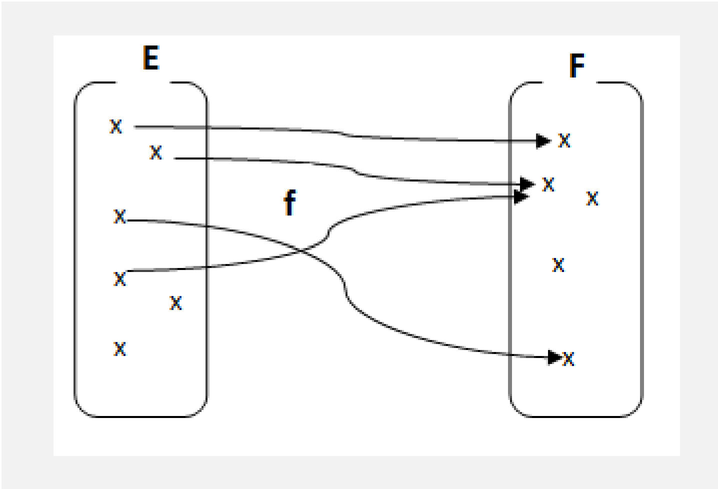
Chap.8 : FONCTION LINEAIRE & EQUATION DU 1^ER^ DEGRE A UNE INCONNUE

I. Fonction linéaire

1. Définition d'une fonction & vocabulaire

On appelle **fonction**, **notée f**, une association entre **deux ensembles E et F**, qui pour tout éléments, **x de E**, on lui associe par f, **au plus** un élément **y de F.**

Schématiquement :



On note cette association par :

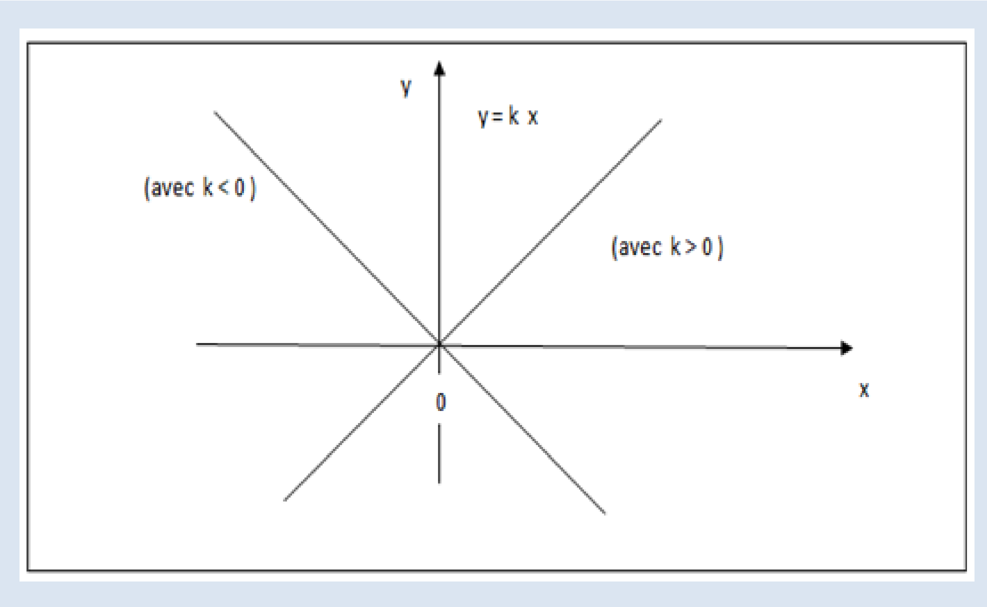
$$\mathbf{x} \in \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{f(x)} \in \mathbf{F}\ ,$$

qui se lit : à un élément x de E on associe un élément (**au plus**) y de F par la fonction f.

- ❖ Quand un x de E à son y dans F, on dit que :
  y "**est l'image**" de x , et x "**est l'antécédent**" de y.

- ❖ L'ensemble des **x** qui **possedent une image par f** est appelé, **l'ensemble de définition de la fonction f.**

- ➢ Lorsque l'association entre y et x **est une relation directe de proportionnalité** : **y = f(x) = *k* x** , où ***k*** désigne un nombre réel (le coéfficient de proportionnalité) , **la fonction f** est dite alors **:** ***fonction linéaire où y est une fonction linéaire de x et k est dit le coéfficient directeur de la fonction f.***
- ➢ ***Le représentation graphique de cette fonction est une droite qui passe par le point M (x = 0 ; y = 0) :***



Exemple 1 : y = f(x) = 0,85 x

- ✓ On représente dans le tableau ci-dessous : **y** qui désigne le prix payé en euros **en fonction** de x qui désigne le nombre de baguettes de pains achetées.

Le prix d'une baguette de pain (juin 2013) = **0,85** €

Tableau 1

x (Nbre de pains)	2	3	4	5	6
Y (Prix en €)	1,70	2,55	3,40	4,25	5,10

Le coefficient directeur, k = $\frac{1,70}{2} = \frac{2,55}{3} = \frac{3,40}{4} = \frac{4,25}{5} = \frac{5,10}{6} = 0,85$

- ✓ **On représente cette association par f : y = f(x) = 0,85 x**

Exemple 2 : y = g(x) = 1,30 x

- ✓ Le tableau ci dessous représente y qui désigne le prix de litres de gazole pour chaque x, nombre de litres achetés.

1 l de gazole coûte (juin 2013) 1,30 €.

Tableau 2

x(Nbre de litres)	10	20	30	40	50
y (Prix en €)	**13**	**26**	**39**	**52**	**65**

Le coefficient directeur, k = $\frac{13}{10} = \frac{26}{20} = \frac{39}{40} = \frac{52}{50} = \frac{65}{60} = 1,30$

- ✓ **On représente cette association par g : y = g(x) = 1,30 x**

Exercice :

- Représenter dans un repère orthonorormmé (O, I, J) les ggraphes des fonctions précédentes f et g .
- En choisissant deux points quelconques A(x_a ; y_a) et B(x_b ; y_b), montrer que le coefficient directeur des fonctions f et g est donné par :

$$k = (y_b - y_a) / (x_b - x_a)$$

Remarques :

Notons que pour toutes ces fonctions, quand **x=0**, on a : **f(0)=0 et g(0)=0**.

Le graphe de **f et g sont des droites qui passent par l'origine du repère**.

Lorsque le graphe d'une fonction f est une droite **qui ne passe pas par l'origine du repère**, la fonction f est dite **fonction affine**. Sa forme est donnée par :
y = f(x) = a x + b, où **a** est le coéfficient directeur et **b** l'ordonnée à l'origine.

II. Equation du premier degré à une inconnue

1. Définition & vocabulaire

Une équation est par définition est **une égalité** entre deux membres : A = B .
Exemple : **A** représente la masse de **2 kg** de pommes et **B** la masse de **2 kg** de cerises.
D'une façon générale, A et B sont des **expressions littérales** donc contenant des variables ou des inconnues : x, y, a, b, ... et/ou des constantes, par exemple :

A= 5x + 3	et	**B**= 7 - 5x
A= 3 + 4y	et	**B**= 2 - 2y
A= 6a -3	et	**B** = 3 - 3a .

Mathématiquement, on cherche en général **à déterminer** dans une équation donnée **la valeur ou les valeurs des variables mises en jeu** pour que l'égalité entre **A** et **B** soit vérifiée. C'est ce qu'on nomme communément : **résoudre une équation**.

NB : Notons que les formes ici de **A** et **B** , équation du premier degré à une inconnue, sont de types **fonctions affines**, *que nous aborderons dans le prochain niveau de certification* :

$$x \longrightarrow y = f(x) = ax + b$$

ou **a** et **b** ici désignent des constantes réelles.

2. Résolution d'une équation du 1er degré à une inconnue

Résoudre une équation **A = B** du 1er degré à une inconnue de variable x, revient à résoudre l'équation **A - B = 0**, pour **déterminer la valeur de variable x**.
La méthode de résolution est basée sur deux principes simples, **transposer** puis r**egroupe**r **les variables** de la même famille. Soit :

1. On transpose toutes les variables **x** à **gauche** de l'égalité et **les constantes** à **droite** de l'égalité en **changeant le signe** des éléments transposés en **plus** + ou en **moins -** .
2. On obtient une équation de la forme : a x = b.
3. On obtient la valeur de la variable par **:** $x = \frac{b}{a}$ avec **a** différent de zéro.

Exemple : Résoudre l'équation suivante : **A**= -5x - 3 et **B**= 7 +5x

Problème : on résous :	**- 5x - 3 = 7 + 5x**	**(1)**
On transpose les variables de mêmes familles :	-5x **- 5x** = 7 **+ 3**	**(2)**
On réduit l'équation obtenue :	- 10 x = 10	**(3)**
La solution de cette équation est :	**x = - 1**	

On peut vérifier la solution de la variable x obtenue en remplaçant dans l'équation de départ **(1)** la valeur de x par -1. Soit : - 5 (-1) - 3 = 7 + 5 (-1).

Exercices :

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels IR les équations suivantes :

a. x + 3 = -5 + 6x b. 4 - 2 x + 14 x = 4x - 10 +6

EXERCICES

Exercice 1

1. Donner la définition d'une fonction linéaire. Quelle forme a la représentation d'une telle fonction ?
2. Donner la définition d'une fonction affine. Quelle forme a la représentation d'une telle fonction ?
3. f est une foction linéaire de coefficient -2. Donner les deux notations possibles pour exprimer cette fonction.
4. g est une foction linéaire définie par g(-4) = 5. Quel est son coefficient directeur ? Que peut-on dire de son ordonnée à l'origine.

Exercice 2

1. On considère la fonction h definie par h : $x \rightarrow -5x$

   a. Déterminer les images, par la fonction h, des nombres - 4 et $\frac{-3}{10}$.
   b. Calculer h(-2) et h(0,5).
   c. Déterminer les antécédents de 10 et 20.

2. On considère la fonction g definie par g : $x \rightarrow -5x + 4$

   a. Déterminer les images, par la fonction g, des nombres 0 et $\frac{-4}{5}$.
   b. Calculer g(-2) et g(0,5).
   c. Déterminer les antécédents de 0 et 4.

Exercice 3

Dans un magasin une cartouche d'encre pour imprimante coûte 15 €. Sur un site internet cette même cartouche coute 10 €, avec des frais de livraison fixes de 50 € quel que soit le nombre de cartouches achetés.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre de cartouches achetées	2	5	10	20
Prix à payer en magasin			150	
Prix à payer sur internet			150	

2. On note par **x** le nombre de cartouches achetées.

a. On note P_A le prix à payer pour l'achat de x cartouches en magasin. Exprimer P_A en fonction de x.

b. On note P_B le prix à payer pour l'achat de x cartouches sur internet. Exprimer P_B en fonction de x.

3. Dans un repère orthogonal tracer les droites (d) et (d') définies par :

(d) la fonction definie par : $x \rightarrow 15x$

(d') la fonction definie par : $x \rightarrow 10x + 50$

4. En utilisant les graphiques précédents :

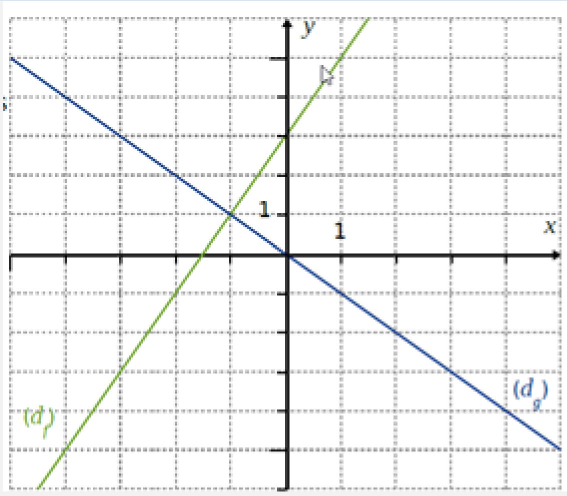
a. Déterminer le prix le plus avantageux pour l'achat de 7 cartouches

b. Sarah dispose de 100 €. Est-il est plus avantageux d'acheter des cartouches en magasin ou sur internet ?

5. A partir de quel nombre de cartouches le prix en magasin n'est-il plus avantageux ? Justifier votre Réponseonse.

Exercice 4

Le graphique ci-dessous représente deux fonctions f et g.



1. Quelle est la nature de la fonction f ?
2. Déterminer l'expression de f en fonction de la variable x en expliquant votre démarche.
3. Déterminer l'expression de f en fonction de la variable x en expliquant votre démarche.
4. En déduire par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux fonctions.

Exercice 5

1. Résoudre dans IR les équations suivantes :

a. $3x + 4 = 2x + 9$ **b.** $2x + 3 = 3x - 5$ **c.** $5x + 8 = 0$
d. $5 - (x - 3) = 4x - (3x - 8)$ **e.** $2(x-1) - 3(x+1) = 4(x - 2)$

Exercice 6

En se ramenant à des équations du 1er degré, résoudre les équations suivantes à l'aide de la factorisation ou l'égalité de deux carrés :

a. $(x+2)^2 = (x+2)(x-6)$ **b.** $(2x+3)^2 = 36$ **c.** $(3x+3)^2 = 4(2x-2)^2$

Exercice 7

Pour tout réel x, on pose :

$f(x) = (x+3)^2 - 25$ (forme 1)

1. Montrer que : $f(x) = x^2 + 6x - 16$ (forme 2)
2. Montrer que : $f(x) = (x - 2)(x + 8)$ (forme 3)

3. A l'aide de ce qui précède, choisir la forme adaptée pour résoudre les équations suivantes :

a. $f(x) = 0$ b. $f(x) = 11$ c. $f(x) = -16$