Plan du chapitre 7 :

PROPORTIONNALITE & POURCENTAGE

Chap.7 : PROPORTIONNALITE & POURCENTAGE

I. Proportionnalité & définitions

1. Situations proportionnelles

Deux nombres ou suites de nombres **sont dits ou dites proportionnelles** si et seulement si chaque nombre de la deuxième suite (ou resp. la première suite) est obtenu **en mutipliant** la première suite (ou resp. la deuxième suite) ***par un même nombre k (resp. k') dit facteur ou coefficient de proportionnalité.***

Exemple 1 : **deux nombres proportionnelles**

10 = 2 x 5 ,   12 = 4 x 3,   35 = 7 x 5 ,   etc...

Exemple 2 : tableaux de proportionnalités

- ✓ On représente dans le tableau ci-dessous deux suites proportionnelles : le nombe de baguettes de pains achetées et le prix payé correspondant en euros.

Le prix d'une baguette de pain (juin 2013) = **0,85 €**

Tableau 1

Nbre de pains	2	3	4	5	6
Prix en €	1,70	2,55	3,40	4,25	5,10

Le coefficient de proportionnalité = $\frac{1,70}{2} = \frac{2,55}{3} = \frac{3,40}{4} = \frac{4,25}{5} = \frac{5,10}{6} = 0,85$

- ✓ Le tableau ci dessous représente le nombre de litres de gazole payés pour chaque litre acheté.

1 l de gazole coûte (juin 2013) **1,30 €.**

Tableau 2

Nbre de litres	10	20	30	40	50
Prix en €	13	26	39	52	65

Le coefficient de proportionnalité = $\frac{13}{10} = \frac{26}{20} = \frac{39}{40} = \frac{52}{50} = \frac{65}{60} = 1,30$

2. Propriétés

Dans un tableau de proportionnalité on peut toujours :

- ❖ **additionner ou soustraire deux colonnes pour en former une nouvelle.**
- ❖ **multiplier une colonne par un même nombre pour en former une nouvelle.**

Exemple **(Tableau 2 précédent) :**

- **Addition des colonnes** : colonne $\binom{10}{13}$ + colonne $\binom{30}{39}$ donne la colonne $\binom{40}{52}$
- **Soustraction des colonnes** : colonne $\binom{50}{65}$ - colonne $\binom{20}{26}$ donne la colonne $\binom{30}{39}$
- **Mutiplication de la colonne** $\binom{20}{26}$ par **2** donne la colonne $\binom{40}{52}$

❖ **Le produit "en croix "**

✓ **Dans un tableau de proportionnalité les produits en croix sont égaux.**

Exemple (Tableau 1 précédent) :

Nbre pains	3	4
Prix en €	2,55	3,40

On effectue le produit "**en croix** " : 3 x 3,40 = 2,55 x 4 = 10,20

II. Utilisation de la proportionnalité

1. Vitesse, durée et distance parcourue

On appelle vitesse moyenne notée **V donnée en m/s** d'un mobile (voiture par exemple) la distance D parcourue en mètre sur la durée du parcours t en seconde.

$$V=\frac{D}{t} \quad \text{ou} \quad D= V \times t \quad \text{ou} \quad t=\frac{D}{V}$$

On dit aussi que la distance **D est proportionnelle à la durée du parcours t.**

Exemple : un cycliste parcourt 20 km en 1h. Quelle est sa vitesse en m/s?

NB: savoir convertir les unités des distances

2. Notion d'échelle

On appelle **échelle** le rapport (ou fraction) entre une longueur sur un plan ou un graphique dite longueur apparente sur sa longueur réelle.

$$\text{Echelle} = \frac{\text{Distance apparente}}{\text{Distance réelle}}$$

Exemple : une carte routière à l'échelle 1/10000000 - c'est à dire : 1 cm représente 10^7 cm = 100 km.
Soit une distance réelle de 700 km. Qu'elle sera sa distance sur la carte en cm ?

La distance sur la carte = **Echelle** x **distance réelle en cm**, soit :

$$\left(\frac{1}{10\,000\,000}\right) x\ 700\ 000\ 00 = 7\ \text{cm}.$$

On construit un tableau de proportionnalité après avoir exprimé les distances dans les mêmes unités, ici en cm. On obtient finalement 7cm en utilisant le produit en croix.

Distance apparente en cm	1	7
Distance réelle en cm	10000 000	70000000

3. Le partage proportionnel

Partager un nombre N= x + y + z proportionnellement aux nombres a, b et c consiste à déterminer les nombres x, y et z de façon à avoir le facteur de proportionnalité k :

$$k = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{N}{a+b+c},$$

avec

$$x = k \times a, \quad y = k \times b \quad \text{et} \quad z = k \times c.$$

Exemple :

Les parents décident de partager une somme de **36 000 €** sur leurs trois enfants, Paul, Suzanne et Pierre proportionnellement à **2, 4** et **6** parts. Calculer la somme reçue par chaque enfant ?

On établit un tableau de proportionnalité suivant :

Somme reçue par enfant en €	Paul x	Suzanne y	Pierre z	Total 36000
Part par enfant	2	4	6	12

Le facteur de proportionnalité k vaut : **36000 ÷ 12 = 3000**

La somme reçue par Paul est **x=6000 €**

La somme reçue par Suzanne est **y= 12000 €**

La somme reçue par Pierre est **z =18000 €**

On vérifie bien que : **6000€ + 12000€ + 18000€ = 36000€.**

III. Définition du pourcentage

1. Calcul d'un pourcentage

Calculer un pourcentage **t %** d'un nombre **A,** c'est multiplier ce nombre par : **A** x **t /100**.

Exemple : 12% de 120 représente :

$$120\ x\ \frac{12}{100} = 14{,}4.$$

2. Pourcentage et tableau de proportionnalité

Si une quantité y représente t% de la quantité x , soit : $y = \frac{t}{100}$ x , alors ceci est équivalent à un tableau de proportionnalité :

Effectif partiel	**y**	**t**
Effectif total	**x**	**100**

Le produit en croix du tableau permet de déduire y connaissant x et t ou vice-versa x connaissant y et t.

Exemple :

Les 12 personnes de la classe désignent les 80 % de stagiaires de la classe préformation 2013 présents au cours de math. Quel est le nombre total de stagiaires de la classe de math ?

Le nombre total de stagiaires de la classe de math est égal à x. Soit :

$$x = \frac{100}{80}\ x\ \ 12 = \textbf{15 stagiaires.}$$

3. Calcul d'une hausse et d'une baisse de t%

On désigne par V_0 et V_f les valeurs initiales et finales respectives d'un nombre.

On dit que la valeur initiale V_0 de ce nombre subit une hausse de t % si et seulement si :

$$\mathbf{V_f = (1 + t\ \%\ )\ V_0}$$

De la même façon, on dit que la valeur initiale V_0 de ce nombre subit une diminution de t % si et seulement si :

$$\mathbf{V_f = (1 - t\ \%\ )\ V_0}$$

Exemple :

Un billet de train coûte 100 €. Quel sera son nouveau prix dans chacun des cas suivants :

a) s'il subit une hausse de 10% b) s'il subit une baisse de 10%.

a. Cas d'une hausse : prix = (1 + 10%) 100 = **110 €**

b. Cas d'une baisse : prix = (1 - 10%) 100 = **90 €.**

- ## Calcul d'une évolution successives de t % et t' %

Soit une **valeur initiale V_0 subissant une évolution successive** de **t%** et **t'%** .
Sa valeur finale V_f sera égale à :

$$V_f = (1 + t \%) (1 + t' \%) V_0$$

Exemple :

Un billet coûtait au départ 100 €. Il subit en 2012 une hausse de t=10% suivie d'une baisse en 2013 de t'=10%.

a. Quel est alors son nouveau prix en 2013 ? Son prix a - il baissé ou augmenté ?

b. Déterminer le pourcentage de cette évolution du prix.

- Son nouveau prix est = (1 + 10%)(1 - 10%) x 100 = **99 €.**

- Le prix du billet a baissé d'un **pourcentage txt'** égal à 0,1x 0,1= 0,01. Soit 1%.

NB :

➢ **Lors d'une évolution successive accompagnée d'une hausse (resp. baisse) de t% et suivie d'une baisse (resp. hausse) de t %, on a toujours une baisse de t% x t %.**

- ## Calcul du pourcentage d'évolution réciproque t'%

Soit une valeur initiale V_0 subissant une hausse de t % pour atteindre une valeur finale V_f.

On appelle **pourcentage d'évolution réciproque** la valeur :

$$t' \% = t \% \;/ (1 + t \%) ,$$

le pourcentage permettant de revenir à la valeur initiale V_0 partant de valeur finale V_f. Soit :

$$V_0 = (1 - t' \%) V_f$$

Exemple :

Pour revenir au prix pratiqué en 2012 sur le lait, le gouvernement actuel décide d'annuler les **5 %** de la hausse effectuée sur le litre de lait vendu en 2012. Sachant qu'un litre de lait coûte actuellement **0,75 €.**

a. Quel sera le pourcentage d'évolution réciproque pour annuler cette augmentation ?
b. Quel sera alors son nouveau prix arrondi au centième ?

Le pourcentage d'évolution réciproque est = 5 % /(1+ 5%) = **4,76 %** , inférieur donc à 5%.

Le nouveau prix sera égal à : (1 - 4,76%) x 0,75 = **0, 72 €.**

EXERCICES

Exercice 1

Pour chacun de ces énoncés indiquer s'il y'a oui ou non proportionnalité entre les grandeurs désignées. Justifier.

1. 10 kg de pommes coûtent 19 €. La quantité achetée et le prix à payer sont-ils des grandeurs proportionnelles ?

2. Une voiture roule à 30 km/h. La durée de trajet et la distance parcourue sont-elles des grandeurs proportionnelles ?

3. A 15 ans, Mac chausse du 36.
Son âge et sa pointure sont-ils des grandeurs proportionnelles ?

Exercice 2

Chacun des tableaux suivants correspond-il à une situation de proportionnalité ? Si oui, quel est le coefficient de proportionnalité ?

a.

3	12	15
2	8	10

b.

3	5	7	14
0,3	0,5	0,9	1,4

c.

10	30	40	60	80
5	6	10	12	20

Exercice 3

Compléter les tableaux de proportionnalité suivants :

a.

6	4
15	X ?

b.

6	10
Y ?	25

c.

Z ?	5
25	15

d.

10	W ?
5	50

Exercice 4

Une somme de 19500 € est partagée sur 15 parts égales. Compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Somme reçue (€)	?	?	?	19500
Part de proportionnalité	4	6	5	15

Exercice 5

1. Convertir en m/s les vitesses suivantes :
a) 36 km/h b) 1342 km/h c) 10 km/h

2. Convertir en km/h les vitesses suivantes :
a) 10 m/s b) 340 m/s c) $3\ 10^8$ m/s

Exercice 6

Un automobiliste parcourt 120 km sur une autoroute. Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{1000\,000}$, quelle distance, en cm, correspond au parcours effectué ?

Exercice 7

Sur un plan fourni par les services techniques de l'urbanisme, la hauteur du trottoir à réaliser est de 1,2 cm. Sachant que le plan est à l'échelle 1/20. Quelle est la hauteur réelle du trottoir ?

Exercice 8

Un piéton marche à la vitesse de 4 km/h.

a. En combien de temps parcourt-il 15 km ? Et 10 km ?

b. Quelle distance parcourt-il en 2h et 3h 30 mn ?

Exercice 9

Une somme de 10 000 € est partagée entre 5 personnes.

Paul en reçoit $\frac{2}{40}$, Pierre en reçoit un quart, Jacques en reçoit $\frac{7}{50}$, Louise $\frac{6}{100}$ et Martine le reste de la somme.

Indiquer la part de chacun en euros.

Exercice 10
Trois personnes, Eloise, Momo et Pascale ont acheté ensemble un billet de loterie. Eloise a donné 9 €, Momo 15 € et Pascale 11 €. Le billet gagne 9600 €. Calculer la part qui revient à chacun sachant que le gain est partagé proportionnelement aux mises.

Exercice 11
Le budget du service scolaire de l'école est de 255 000 € en 2013. Il est prévu de le diminuer de 1,25 % l'année suivante. Quel sera le budget de ce service en 2014 ?

Exercice 12
Un billet de train Eurostar Paris-Londre coûte 88 € A/R en 2012. Indiquer son nouveau prix dans chacun des cas suivants :

a. Il subit une hausse de 10 %
b. Il subit une baisse de 10 %
c. Il subit une hausse de 40 %
d. Il subit une baisse de 25 %

Exercice 13
En deux ans, un loyer mensuel de 650 € subit deux évolutions successives : une hausse de 10 % et une baisse de 10 %.
Quel est alors le nouveau montant ? Conclure.

Exercice 14
Le prix d'un article de 100 € diminue de 5% les six premiers mois de l'année et augmente de 5% les six derniers mois.
a. Quel est alors son nouveau prix ?
b. En moyenne sur une année, le prix de cet article a-il augmenté ou diminué ?

Exercice 15
Le nombre d'adhérents d'une association est passé de 152 à 163. Calculer le pourcentage de l'augmentation ?

Exercice 16
En novembre dernier, le prix d'un litre de gasoil a augmenté de 2% pour atteindre 1,354 €. Quel était son prix avant la hausse (arrondir le résultat au centième).

Exercice 17
Dans ce qui suit, une seule Réponseonse est exacte.
1. Le prix d'un produit passe de 25,60 € à 27 €. Une valeur approchée au dixième du pourcentage d'augmentation est :
a) 5,2 % **b) 5,5%** **c) 1,4%**
2. En passant de 100 € à 200 €; le prix de cet article a augmenté de
a) 50% **b) 100%** **c) 200%**
3. Une quantité diminue de 5% puis augmente de t % pour reprendre sa valeur initiale. Alors t % est égal à :
a) 5% **b) 4,76 %** **c) 5,26 %**
4. Le prix d'un produit a baissé de 12,3% en 2013. Par quel nombre doit-on mutiplier son prix en 2013 pour obtenir son prix de 2012 ?
a) 0,877 **b) 1,140** **c) 1,123**

Exercice 18
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre Réponseonse.
1. X_0 et X_1 sont deux grandeurs positives. Si X_1 est égal à t % de X_0 , alors $X_1 < X_0$
2. Si le coffecient multiplicatif k= (1+ t %) est associé à une baisse, alors k <1.
3. Si le prix P_0 d'un produit augmente de t % et diminue de t' %, alors son prix est égal à (1+ t %)(1 - t' %) P_0 .

Exercice 19
Calculer le taux déevolution réciproque :
a. pour une augmentation de 10 %,
b. pour une baisse de 20 %
c. pour une aumentation de 100 %