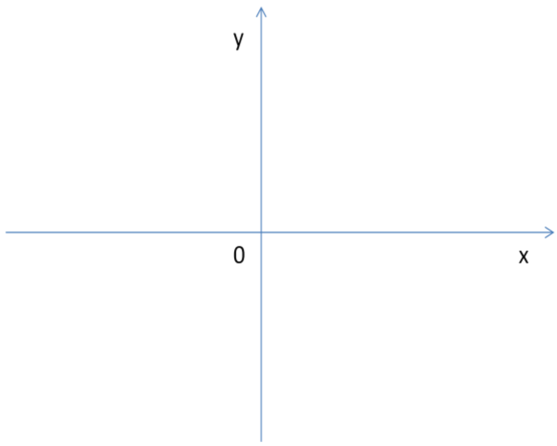
Plan du chapitre 6 :
REPERAGE DANS LE PLAN ET GEOMETRIE

Chap.6 : REPERAGE DANS LE PLAN ET GEOMETRIE

I. Repérage dans le plan

1. Référentiel orthogonal plan

Un référentiel ou repère orthogonal à deux dimensions est constitué de deux axes **gradués**, **orientés**, **sécants** et **orthogonaux** entre eux.



- **Figure 1 :** système d'axes orientés -

L'axe horizontal, noté **OX** est appelé **l'axe des abscisses**. L'axe vertical, noté **OY** est appelé **l'axe des ordonnées**. Le point d'intersection **O** des deux axes est nommé **l'origine** du repère.

- ✓ Le repère est dit **orthonormé** si l'échelle des graduations suivant les deux axes est égale à l'unité.
- ✓ Le repère est dit **unidimensionnel** s'il possède **un seul axe orienté et gradué**.

2. Les coordonnées d'un point M quelconque

Un point M du **plan P** est représenté par **deux coordonnées** : l'abscisse notée x et l'ordonnée notée y. On note : **M(x ; y)**.

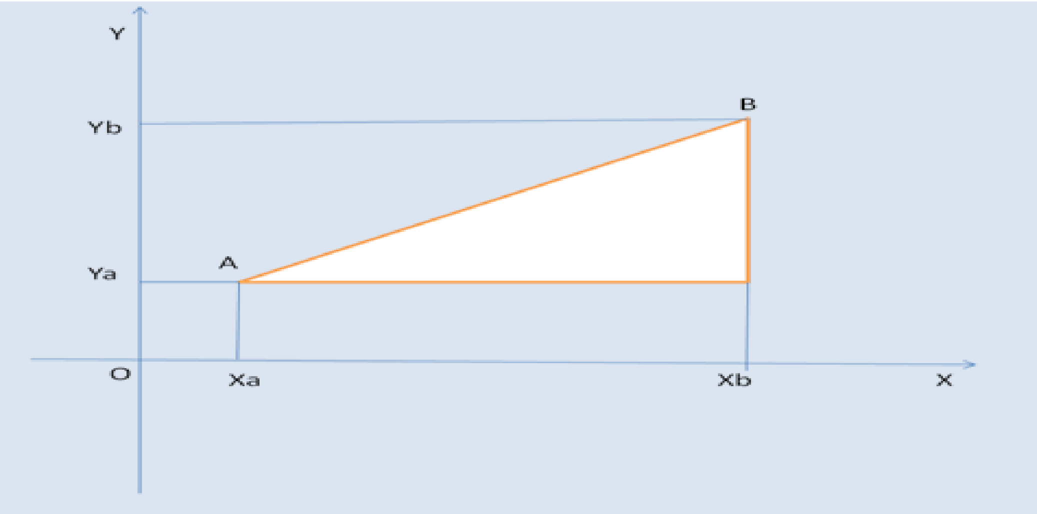
Dans un repère orthogonal, **l'abscisse x** est obtenue par **la projection orthogonale** du point M **par rapport à l'axe des OX**. De la même façon, **l'ordonnée y** est obtenue par **la projection orthogonale** du point M sur **l'axe des ordonnées OY**.

Exercice :

Tracer un repère orthonormé nommé (P) et représenter dans ce repère les trois points suivants : A(1 ; 2) , B(-2 ; 1) et C(0 ; 4).

3. Distance entre deux points A(X_a ; Y_a) et B(X_b ; Y_b)

On considère deux points A(X_a ; Y_a) et B(X_b ; Y_b) placés dans un repère orthogonal de la figure suivante :



- **Figure 2** : distance entre deux points -

On appelle la distance entre deux point A et B, qu'on note ||AB||, la valeur donnée par :

$$\|AB\| = \sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2} \qquad (1)$$

4. Milieu de deux points A(X_a ; Y_a) et B(X_b ; Y_b)

On montre que les coordonnées d'un point M (X_i ; Y_i) milieu de deux points A(X_a ; Y_a) et B(X_b ; Y_b) sont données par :

$$\begin{cases} X_i = \frac{X_a+X_b}{2} \\ Y_i = \frac{Y_a+Y_b}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

Exercice :

1. En utilisant la figure 2 ci-dessus, démontrer la relation (2) précédente.

2. On considère trois points suivants : A(1 ; 2) , B(-2 ; 1) et C(0 ; 4).
Déterminer :
   a. la distance ||AB|| et les coordonnées du point I milieu de AB,
   b. la distance ||BC|| et les coordonnées du point J milieu de BC,
   c. la distance ||CA|| et les coordonnées du point K milieu de CA.

3. Quelle est la nature de la figure géométrique décrite par ces trois distances ?

II. Tableaux de valeurs et courbes représentatives

Il est assez fréquent qu'une **grandeur notée Y dépende**, dans les valeurs qu'elle prend, d'une autre **grandeur notée X**. On dit dans ce cas **que Y est fonction de X et on note Y=f(X)**.

Pour représenter cette **relation de dépendance**, on utilise généralement **un tableau de valeurs**.

Un tableau de valeurs composé de deux grandeurs dépendantes Y et X est constitué de deux lignes et de plusieurs colonnes.

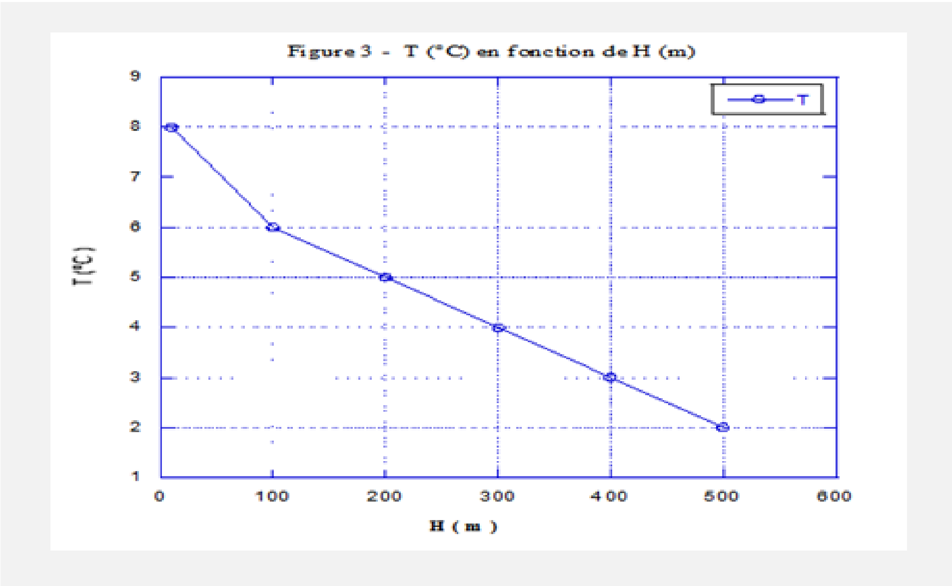
Exemple : variation de la grandeur ici les températures moyennes en °C notée T en fonction de l'altitude en mètre notée H de la région d'Alsace pour le mois de Février 2013.

Dans le tableau ci-dessous nous avons reportés les valeurs des températures T en fonction de H.

H (m)	10	100	200	300	400	500
T (°C)	8	6	5	4	3	2

Il devient dés lors intéressent de visualiser ce tableau par **un graphique ou une courbe représentative** donnant cette variation de la température moyenne T en fonction de l'altitude H dans un repère orthogonal avec une échelle convenablement choisie.

Les points de coordonnées (H ; T) : (10 ; 8), (100 ; 6), (200 ; 5), (300 ; 4), 400 ; 3) et (500 ; 2) sont représentés sur le graphe de la figure 3 ci-dessous :



La courbe de la figure 3 est obtenue en joignant les points les uns aux autres en allant de la gauche vers la droite.

En général la courbe obtenue d'un tableau de valeurs donné permet :

- ✓ une lecture ou une visualisation graphique rapide des grandeurs étudiées,
- ✓ de mieux appréhender la relation de dépendance entre les grandeurs considérées,
- ✓ de faire des prévisions ou des extrapolations,
- ✓ de se poser ou de soulever des questions intéressantes.

Dans le cas du graphique de la figure 3 donnant T en fonction de H, on peut noter que :

- La température moyenne T est une fonction décroissante avec l'altitude H.
- Une extrapolation de la courbe pour une altitude H=600 m donne la réponse à la question de la température moyenne à cette altitude : T=1°C.
- Pour une température T=7°C, la lecture graphique de l'altitude donne l'altitude H environ égale à 50m.
- etc.

Remarques :

- Notons qu'en général, un graphe est beaucoup plus parlant, facile et rapide à lire qu'un tableau de valeurs.
- Ne pas hésiter d'utiliser des graphiques pour expliquer ou mettre en évidence une étude ou un résultat.

Activité : Conversion degré Celsius en degré Fahrenheit

Le degré **Fahrenheit** (°F) est une unité de mesure de la température, proposée par le **physicien allemand Daniel Gabriel Fahrenheit en 1724**.

L'échelle de Fahrenheit est aujourd'hui utilisée aux Etats-Unis et dans d'autres pays. Pour convertir en degrés Fahrenheit une température donnée en degrés Celsius, il suffit de multiplier cette température par 9, de diviser par 5 le résultat obtenu et d'ajouter 32.

Soit :

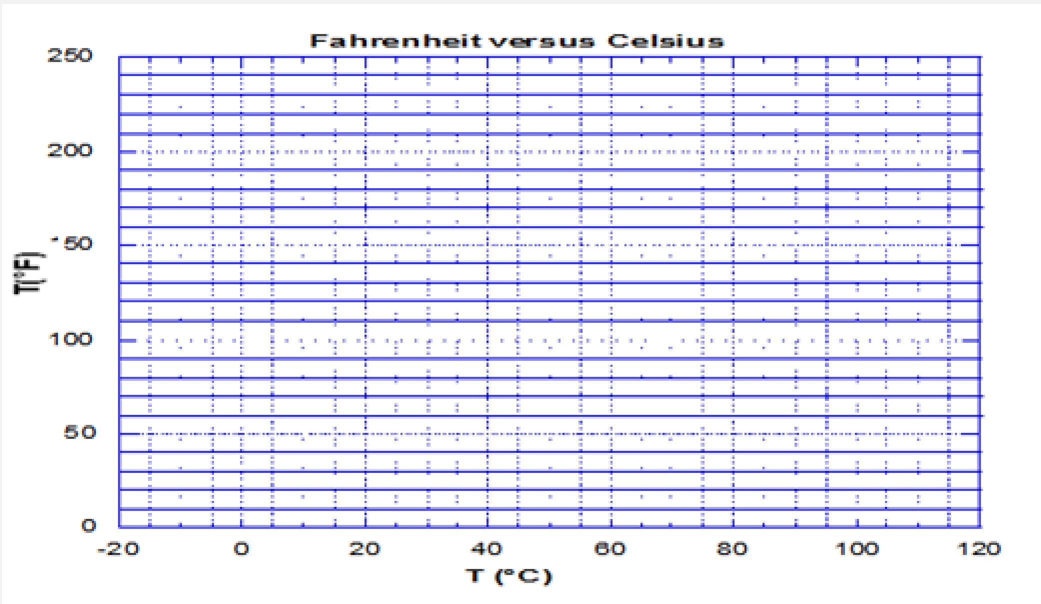
$$T(°F) = T(°C) \times 9/5 + 32$$

1. On se propose de compléter le tableau ci-dessous et de reporter dans un repère orthogonal la température en degré Fahrenheit en fonction de la température donnée en degré Celsius.

Tableau des valeurs.

T(°C)	0	10	20	25	30	35	100
T(°F)							

Le graphique ci-dessous donne T(°F) = f(T°(C)) :



Commentez ce graphe.

2. En déduire de ce qui précède la formule inverse : **T(°C)= f(T(°F)).**

Activité : Conversion degré Celsius en degré Fahrenheit

Réponse :

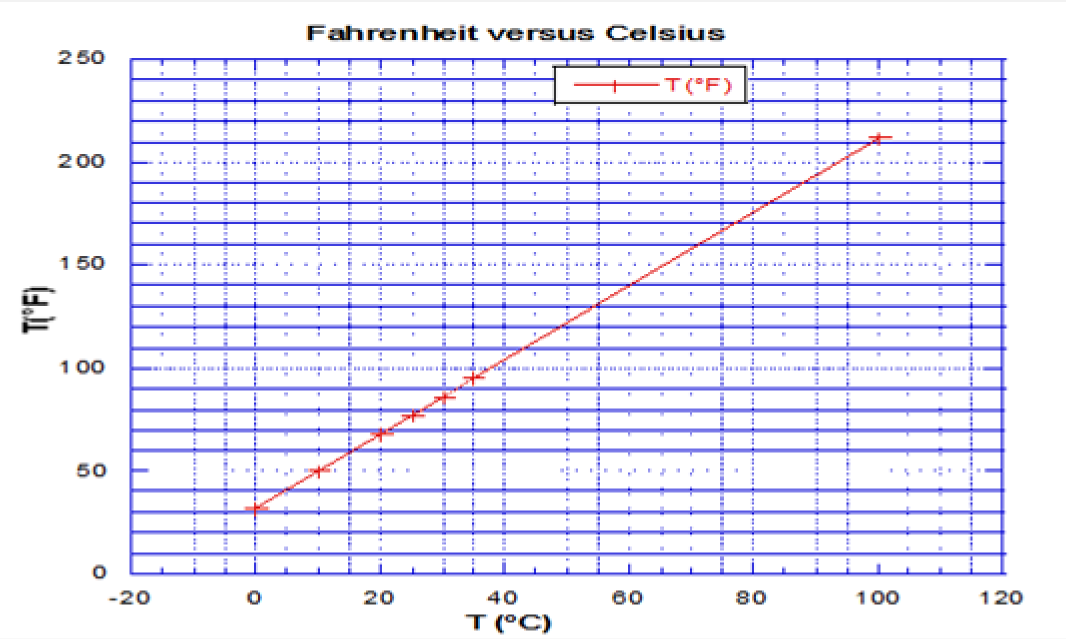
1.

$$T(°F) = T(°C)\times 9/5 + 32$$

On obtient le tableau de valeur suivant :

T(°C)	0	10	20	25	30	35	100
T(°F)	32	50	68	77	86	95	212

Le graphique ci-dessous donne T(°F) = f(T°(C)) :



Les points sont alignés. On obtient une droite - voir chapitres 7 et 8 pour plus de détails -

2.

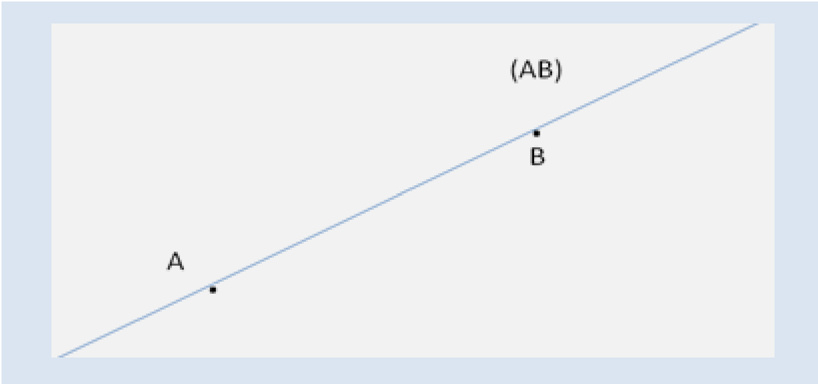
T(°C) en fonction de T(°F) donne :

$$T(°C) = T(°F)\times 5/9 - 160/9$$

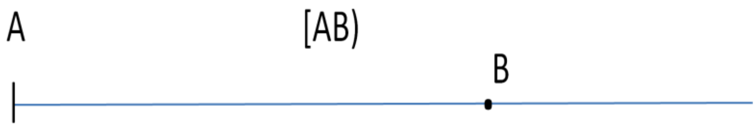
III. Figures usuelles de géométrie plane

1. Définitions et notations

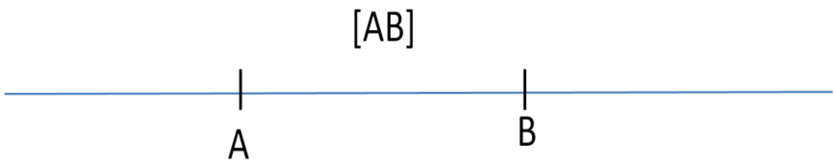
Une droite : est un ensemble infini de points alignés. Par deux points distincts passe une droite unique



Un demi-segment de droite : est une demi-droite limitée par un point ou une extrémité appelée origine.



Un segment de droite : est une portion de droite limitée par de points.



2. Unités de mesure des longueurs et surfaces

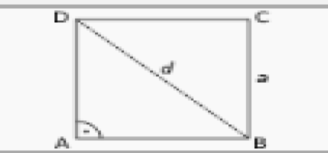
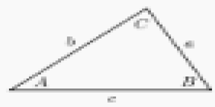
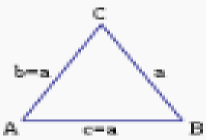
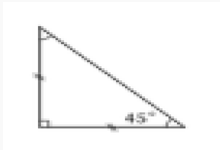
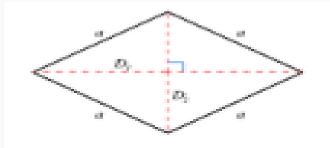
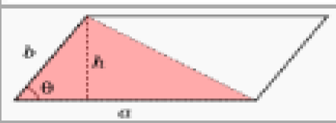
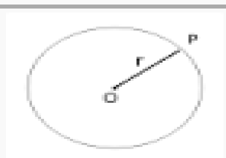
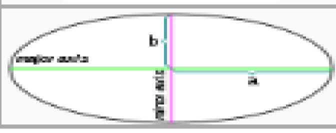
❖ Multiples et sous multiples du mètre

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1km= $10^6 m^2$	1hm= 10^4 m^2	1dam= 10^2 m^2	$1m^2$	1dm= 10^{-2} m^2	1cm= 10^{-4} m^2	1mm= 10^{-6} m^2

❖ Multiples et sous multiples du mètre carré

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1km= 1000	1hm= 100m	1dam= 10m	1m	1dm= 0,1m	1cm= 0,01m	1mm= 0,001m

3. Périmètres et surfaces de quelques figures planes

Nom	Représentation	Périmètre $\mathcal{P}$	Aire intérieure $\mathcal{A}$
Carré		$4a$	a^2
Rectangle		$2(a+b)$	$a \times b$
Triangle		$a+b+c$	$\frac{1}{2}b \times h$
Triangle équilatéral		$3a$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Triangle isocèle rectangle		$(2+\sqrt{2})c$	$\frac{1}{2}c^2$
Losange		$4a$	$\frac{1}{2}D_1 \times D_2$
Parallélogramme		$2(a+b)$	$a \times h$
Trapèze		$a+b+c+d$	$\frac{1}{2}(a+c) \times h$
Disque		$2\pi r$	πr^2
Ellipse		(non algébrique)	πab

IV. Géométrie dans l'espace

1. Unités de mesure des volumes

Le volume correspond ***à l'espace qu'occupe un objet ou une substance solide, liquide ou gazeuse***. Il peut-être calculer pour des formes géométriques simples telles que : les cubes, les pavés, les cylindres, les sphères etc. **Son unité de mesure dans le système international est le mètre cube** : volume qu'occupe un cube de un mètre de côté. Pour **les liquide et les gaz, il est assez courant d'utiliser l'unité de mesure le litre et ses dérivées**.

Dans le te tableau suivant nos résumons les deux unités de volume citées et leurs unités dérivées.

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			
											1	0	0	0						
														1						

NB :

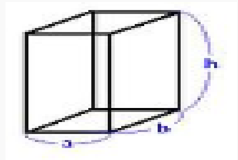
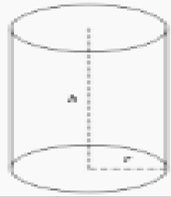
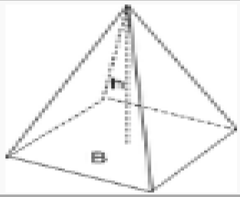
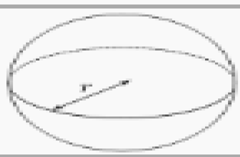
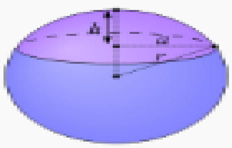
1 dm^3 = 1 L **et** **1 m^3 = 1000 L**

Exercices d'application :

1. Convertir en cm^3 13 m^3= ....cm^3 = ...10 cm^3
2. Convertir en m^3 0,00024 km^2 =.................... m^3 = ... 10 m^3
3. Convertir en litre 32 dal ; 45 cl ; 1000 ml ; 100 cl ; 2,5 dal.
4. Convertir 1 m^3= .... l ; 1500 cl= .... hm^3 ; 12 ml= .... mm^3.
5. Effectuer les calculs suivants en exprimant la réponse dans l'unité précisée entre parenthèses :

a. 428 cm + 7,50 dam + 10 000 mm = ... (m)
b. 1250 cm + 1000 km - 50 dm = ...(dam)

2. Figures usuelles de géométrie dans l'espace

Nom	Représentation	Aire de la surface	Volume intérieur
Cube		$6c^2$	c^3
Pavé droit		$2(ab + ah + bh)$	abh
Prisme droit		P base fois h	$B \times h$
Cylindre de révolution		extrémités : $2 \times \pi r^2$ surface latérale : $2\pi r h$	$\pi r^2 h$
Pyramide			$\frac{1}{3}B \times h$
Tétraèdre régulier		$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Cône de révolution		base : πr^2 surface latérale : $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Sphère		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
Calotte sphérique		base : πa^2 surface courbe : $2\pi r h$	$\frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$
Ellipsoïde		(non algébrique)	$\frac{4}{3}\pi abc$
Tore ouvert		$4\pi^2 r R$	$2\pi^2 r^2 R$

Exercice d'application :

1. On considère la terre sphérique de rayon 6400 km. Calculer sa surface et son volume respectivement en km^2 et km^3. Convertissez ces valeurs en m^2 et m^3.

2. Quel est le volume en cm^3 d'un morceau de sucre de dimensions 2,7 cm x1,7 cm x 1,1 cm

3. Quel est le volume d'un cheveux considéré cylindrique de rayon 0,01 mm et de longueur 8 cm.

V. Théorèmes de Pythagore et de Thalès

1. Enoncé du Théorème de Pythagore (485 av. J-C) et sa réciproque

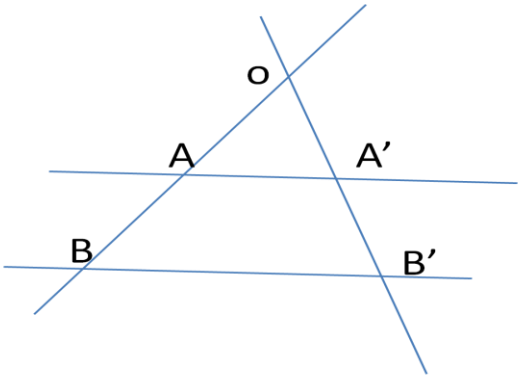
Si un triangle **est rectangle,** alors **le carré de la mesure de l'hypoténuse** (le grand côté du triangle) **est égal à la somme des carrées des mesures des deux autres cotés.**

Réciproquement, si **le carré de la mesure d'un côté est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.**

Exercice :

Calculer la mesure de la diagonale d'un carré de périmètre égal à 4 m.

2. Enoncé du Théorème de Thalès (625 av. J-C) et sa réciproque



On considère comme indiqué sur la figure ci-dessus :

1. **les trois points distincts O, A, B alignés,**
2. **les trois points distincts O, A', B' alignés,**
3. **les droites (AA') et (BB') sont parallèles**

alors :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}.$$

Réciproquement, comme indiqué sur la figure précédente, si : $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$, alors les droites (AA') et (BB') sont parallèles.

Application : agrandissements et réductions d'une figure géométrique.

Faire un agrandissement ou une réduction d'une figure géométrique, cela revient à multiplier les longueurs par un nombre réel **k**. On obtient :

- un agrandissement est obtenu si **k > 1.**
- une réduction est obtenue si **0 ≤ k ≤ 1**.

Conséquences :

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction :

- **les mesures** de la figure sont multipliées par **k**
- **les aires** de la figure sont multipliées par k^2.
- **les volumes** de la figure sont multipliés par k^3.

Exemple :

Soit un rectangle dont la longueur est L=10 m et la largeur l=5 m. On effectue un agrandissement de ce rectangle de rapport **k=2,5**. Calculer l'aire du rectangle obtenu.

Tableaux des conversions : *longueurs, surfaces et volumes*

- **Unités de mesure des longueurs et surfaces**

❖ Multiples et sous multiples du mètre

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1km= 1000	1hm= 100m	1dam= 10m	1m	1dm= 0,1m	1cm= 0,01m	1mm= 0,001m

❖ Multiples et sous multiples du mètre carré

	km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2
	1	0	0	0	0	0	0						
$1km^2= 10^6m^2$		$1hm^2= 10^4\ m^2$		$1dam^2= 10^2\ m^2$			$1m^2$	$1dm^2= 10^{-2}\ m^2$		$1cm^2= 10^{-4}\ m^2$		$1mm^2= 10^{-6}\ m^2$	

- **Unités de volume et leurs unités dérivées.**

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											kl	hl	dal	l	dl	cl	ml			
											1	0	0	0						
														1						

NB :

$1\ dm^3 = 1\ L$ et $1\ m^3 = 1000\ L$

EXERCICES

Exercice 1

Dans un repère (O, I, J) du plan, on considère les points A et B dont les coordonnées sont :

A(-5 ; -1) et B(- 6 ; - 4).

On trace le cercle de centre A et de rayon AB. La droite (d) tangente à ce cercle passant par B coupe la droite (OI) au point C.

1. Faire une figure représentant ces points, le cercle et la droite (d).
2. En utilisant le théorème de Pythagore, calculer le rayon du cercle.
3. Déterminer les coordonnées du point C et en déduire la distance (AC).

Exercice 2

Dans un repère (O, I, J) du plan, on considère les points A, B et C dont les coordonnées sont : A(-5 ; -1) et B(- 4 ; - 4) et C(- 6 ; - 4).

On trace le cercle de centre A et de rayon AB

1. Faire une figure représentant ces points et le cercle.
2. Montrer que le point C appartient au cercle de centre A et de rayon AB.
3. Déterminer les coordonnées du point D symétrique du point C par rapport au point A.
4. Montrer en utilisant le théorème de Pythagore que le triangle BCD est rectangle en B.

Exercice 3

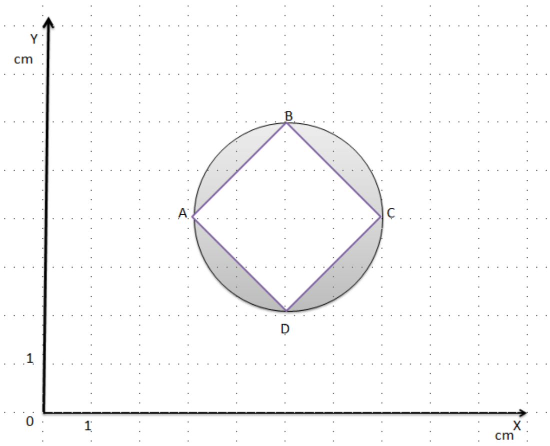
Considérons les cinq points suivants :

A(2 ; 7), B(5; 7), C(15; 2) , D(5; 2), E(2; 2).

1. Placer ces points dans un repère orthogonal d'axes OX et OY .
2. En déduire le périmètre de la figure obtenue.
3. Tracer la droite (AB) passant par les points A et B.
4. Déterminer les coordonnées E', D' et C' points symétriques de E, D et C respectivement par rapport à la droite (AB).

Exercice 4

Considérons la figure ci-dessous :



1. Déterminer les Coordonnées des points A, B, C et D. En déduire les périmètres et les aires des deux figures représentées (parallelogramme et cercle) .

Exercice 5

On considère le quadrilatère ABCD dont les coordonnées A, B et C dans un repère (O, I, J) sont :

A(- 5 ; 1), B(- 1; - 1), C(5; 3)

1. Déterminer les coordonnées du point D de telle façon que le parallélogramme ABCD soit un rectangle.

2. On appelle R, S, T et U les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]..

Déterminer les coordonnées des ces points milieux et en déduire la nature de la figure RSTU.

Exercice 6

Dans un repère (O, I, J), on considère les points A, B et C de coordonnées :

A(- 2 ; - 1), B(4 ; 2), C(-1 ; 4)

1. Faire une figure représentant ces points et construire la hauteur du triangle issue du point C.
2. Montrer que le point H de coordonnées H(0,8 ; 0,4) est le pied de cette hauteur.
3. En déduire l'aire du triangle ABC.

Exercice 7

Dans un repère (O, I, J) du plan, on considère les points A et B dont les coordonnées sont :

A(7 ; 0) et B(3 ; -4).

1. Déterminer les coordonnées des points E, F et G tels que le point E est le milieu de [OF], F le milieu de [AG] et G le milieu de [BF].