Plan du chapitre 3 :
CALCULS EN ECRITURE FRACTIONNAIRE

Chap.3 : CALCULS EN ECRITURE FRACTIONNAIRE

I. Définitions et vocabulaire

Une fraction est **une division non effectuée** entre deux nombres entiers relatifs **a** et **b** **(b ≠ 0).**

Elle est notée : $\frac{a}{b}$.

- Le nombre **a** est appelé **le numérateur**.
- Le nombre **b** est appelé **le dénominateur.**
- **Le trait** ou **la barre de fraction** signifie qu'on divise **a** sur **b**.

Exemples :

$\frac{1}{4}$ qui se lit un quart.

$\frac{-3}{5}$ qui se lit moins trois cinquièmes.

$\frac{+5}{3}$ qui se lit plus cinq tiers.

Remarque :

Lorsque le numérateur **a =1** et le dénominateur **b** un nombre relatif quelconque **non nul,** on dit que le nombre :

$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}$ est **l'inverse** du nombre **b**.

La fraction est dite : ***fraction unitaire.***

II. Représentation d'une fraction par un dessin

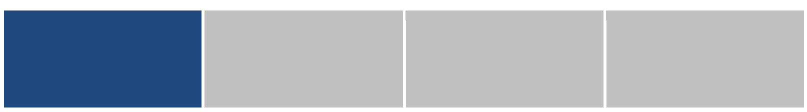
1. Fraction dont numérateur inférieur au dénominateur : a < b.

Le dénominateur b désigne le nombre de parties égales d'une unité **donnée**. Tandis que **le numérateur a** indique le nombre de parties égales **utilisée** de cette même unité.

Exemples :

$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$



2. Fraction dont numérateur supérieur au dénominateur : a > b .

Le dénominateur **b** est ***ici inférieur*** au numérateur. La fraction signifie que le résultat est plus grand que l'unité. Dans l'exemple représenté ci-dessous, nous obtenons, une unité soit trois tiers et un tiers. Soit :

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

3. Fractions équivalentes

Si **on multiplie ou on divise** le numérateur et le dénominateur par ***un même nombre non nul***, on obtient deux fractions dites ***équivalentes.***

Exemples : $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$

- **Critère de comparaison de deux fractions**

- **Pour un même dénominateur plus le numérateur est grand plus la fraction est grande.**
- **Pour un même numérateur plus le dénominateur est grand plus la fraction est petite.**

III. Opérations sur les fractions

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs.

1. Egalité de deux fractions

Deux fractions sont égales si et seulement si :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \equiv \quad a\,d = b\,c \quad \text{avec c et d} \neq 0$$

Exemple : $\frac{6}{15} = \frac{4}{10}$ car $6 \times 10 = 4 \times 15$

2. Simplification de fractions

Si le numérateur et le dénominateur d'une même fraction sont **des multiples d'un même nombre relatif k**, alors on a :

$$\frac{a\,k}{c\,k} = \frac{a}{c}$$

Dans ce cas la fraction est dite ***simplifiable ou réductible***.

Une fraction **non simplifiable** est dite ***irréductible.***

Remarques :

- ***Simplifier ou réduire une fraction revient à décomposer le numérateur et le dénominateur en un produit de facteurs de nombres premiers. (voir chap. 2)***

- ***Le résultat de la simplification donne soit un nombre entier relatif ou une fraction irréductible.***

- ***Une fraction est irréductible si et seulement si, le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux. (Th.)***

Exemples :

$$\frac{6}{15} = \frac{2 \, x 3}{3 \, x \, 5} = \frac{2}{5} \quad \textbf{et} \quad \frac{15}{3} = 3$$

3. Addition et soustraction de deux fractions

L'addition (**resp.** la soustraction) de deux fractions de mêmes dénominateurs d non nul est la fraction dont le numérateur est la somme (**resp.** la différence) des numérateurs et dont le de dénominateur, le dénominateur d. Soit :

$$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \pm b}{d}$$

Exemple :

$$\frac{2}{7} \pm \frac{5}{7} = \frac{2 \pm 5}{7} = \frac{2+5}{7} = 1 \text{ ou } \left(\frac{2-5}{7} = -\frac{3}{7} \right).$$

L'addition (**resp.** la soustraction) de deux fractions de dénominateurs différents, **c** et **d** est la fraction qui s'écrit :

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a\,d \pm bc}{cxd}$$

Exemple :

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{3} = \frac{2 \text{ x } 3 + 5\text{x}7}{7\text{x}3} = \frac{41}{21}.$$

4. Multiplication de deux fractions

La multiplication de deux fractions est la fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs. Soit :

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

Remarques :

- *Dans le cas ou d = 1, on obtient le produit d'une fraction* $\frac{a}{c}$ *par un nombre relatif ici b.*
- **Si b= 1, on obtient le produit d'une fraction** $\frac{a}{c}$ **par** ***l'inverse du nombre d*** **, dite aussi** ***fraction unitaire*** **,** $\frac{1}{d}$ **.**

Exemple :

$$\frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{2x5}{7x3} = \frac{10}{21}.$$

5. Division de deux fractions

Le quotient ou la division de deux fractions est la fraction produit de la première par l'inverse de la seconde. Soit :

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b}$$

Exemple :

$$\frac{\frac{2}{7}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{7} \text{ x } \frac{3}{5} = \frac{6}{37}$$

Quelques sites de mathématiques pour s'exercer

http://www.mathematiquesfaciles.com/exercices/index.php
http://phet.colorado.edu/fr/simulation/fractions-intro

ACTIVITE PRATIQUE

❖ égalités associées

Soit a, b, c et d quatre nombres relatifs non nuls.

En utilisant le principe d'égalité de deux fractions, montrer que si :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{alors on a :} \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \, , \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

❖ Définition équivalente d'une fraction

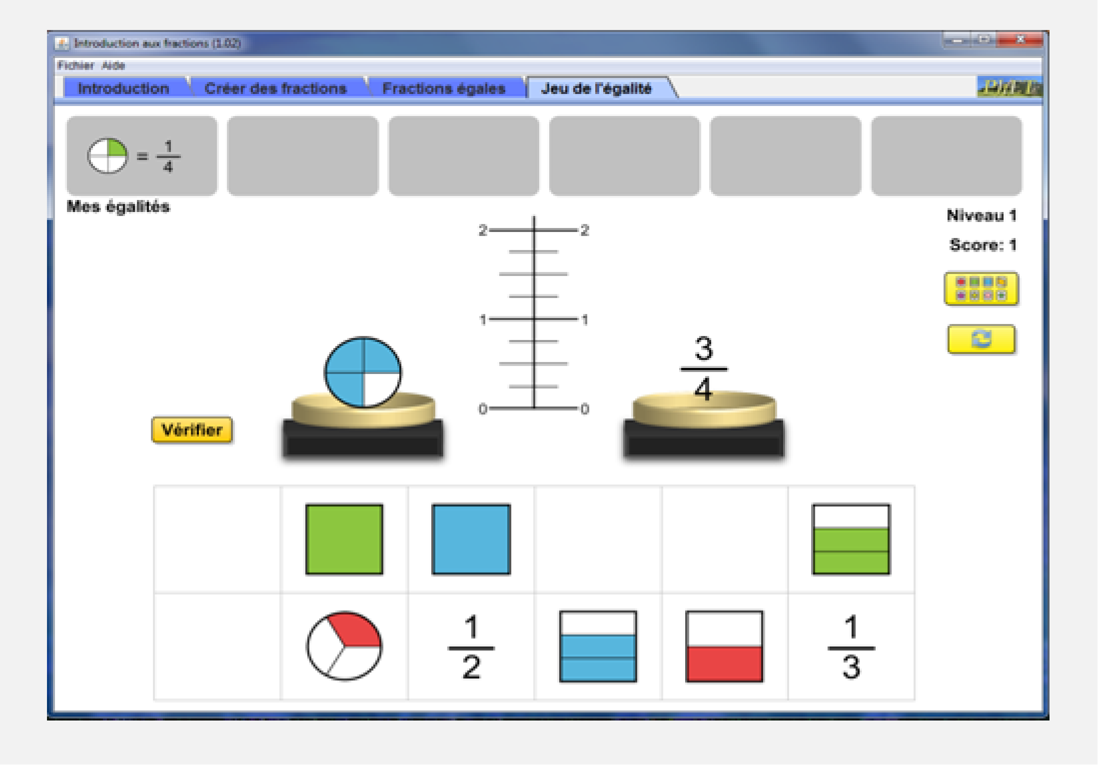
1. Montrer qu'une fraction de deux nombres relatifs $\frac{a}{b}$, avec **b non nul**, peut-être aussi définie *comme la multiplication de deux nombres relatifs*, ***le numérateur a par l'inverse du dénominateur b.***

2. Comment appelle-t-on cette fraction si a= 1 ?

ACTIVITE INTERNET

Le but de cette activité est de se familiariser avec les fractions en s'amusant sur le site éducatif PHET de l'université américaine du Colorado.

- Allumer votre PC et allez sur le lien internet suivant : http://phet.colorado.edu/fr/simulation/fractions-intro
- Télécharger ou exécuter cette applet java : créer des fractions
- On obtient l'interface, créer des fractions de la figure ci-dessous :



De même, vous pouvez aussi voir :

http://phet.colorado.edu/fr/simulation/build-a-fraction
http://phet.colorado.edu/fr/simulation/fraction-matcher

Remarque :

Si le fichier ne s'exécute pas sur votre machine, il est probable que votre navigateur ne dispose pas de la ressource Java. Il faudrait peut-être le mettre à jour.

Quelques sites de mathématiques pour s'exercer

http://www.mathematiquesfaciles.com/exercices/index.ph
http://www.multimaths.net/tice/xmfractions.html

EXERCICES

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux à chacune des quatre affirmations suivantes :

a. $\frac{125}{100}$; $\frac{-15}{-12}$; 1,250 ; $\frac{5}{4}$

sont quatre écriture d'un même nombre

b. $\frac{5}{8} + \frac{2}{5} = \frac{5+2}{8+5}$

c. L'inverse de - 4 est - 0,25

d. $3 \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{3 \times 5}$

Exercice 2

Mentalement, calculer :

a. Le tiers de 6300.
b. Le quart de - 20,4.
c. Le cinquième de 150 x (-5).
d. Le tiers de trois quarts de 12.

Exercice 3

Dans les égalités ci-dessous, les symboles des opérations + , - , x , ÷ , ont été remplacés par des * . Retrouver les symboles d'origine.

a. $\frac{5}{7} * \frac{2}{7} = 1$	b. $\frac{5}{7} * \frac{2}{7} = \frac{10}{49}$
c. $\frac{5}{7} * \frac{2}{7} = \frac{5}{2}$	d. $\frac{5}{7} * \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$
e. $\frac{2}{3} * \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$	f. $\frac{2}{3} * \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$
g. $\frac{1}{3} * \frac{5}{9} = \frac{5}{3}$	h. $\frac{2}{3} * \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$
i. $\frac{1}{2} * \frac{2}{7} = \frac{7}{4}$	j. $2 * \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$
k. $2 * \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$	l. $2 * \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$

Exercice 4

Dans chacune des lignes ci-dessous, un nombre et un seul n'est pas égal aux autres. Trouvez-le.

a. $\frac{-16}{24}$; $\frac{-10}{15}$; $\frac{6}{-9}$; $\frac{9}{-12}$; $-\frac{22}{33}$; $-\frac{30}{45}$.

b. $\frac{5}{40}$; $\frac{-4}{-24}$; $\frac{2,5}{15}$; $\frac{-1,2}{-7,2}$; $-\frac{-3}{18}$; $-\frac{10}{-60}$.

Exercice 5

Calculer les sommes algébriques et exprimer les résultats sous la forme la plus simple possible.

A= $\left(3 - \frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right) + \left(6 - \frac{2}{15}\right) - \left(4 - \frac{7}{5} + \frac{2}{3}\right)$.

B = $\left(\frac{7}{5} - \frac{3}{2}\right) + \left[\left(2 - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{7}{5} + 2\right)\right]$.

Exercice 6

En utilisant la calculatrice, relier chaque expression à son résultat approché :

$\frac{123}{4,56+78,9}$; $\frac{12,3}{45,6} + 0,789$; $\frac{123}{4,56+7,89}$

a. 1,06 b. 3,42 c. 1,47

Exercice 7

Sachant que a= $-\frac{3}{4}$, b= $\frac{1}{6}$ et c= $\frac{-5}{8}$.

Calculer ab, ca , b + c, a(b + c) et $\frac{a}{b+c}$.

Exercice 8

a) Les variables x et y désignent respectivement un nombre positif et négatif. Parmi ces produits et quotients, quels sont ceux qui sont positifs ?

$-10x$; $5y$; xy ; $-4xy$; $\frac{x}{3}$; $\frac{y}{3}$; $\frac{-x}{y}$; $\frac{xy}{-23}$

Exercice 9

On donne trois nombres : $x = -\frac{2}{3}$; $y = \frac{5}{4}$; $z = -\frac{3}{2}$.

Calculer :

A= $x+y$; B= $x\,(y+z)$;

C= $\frac{x}{y}$; D= $\frac{x+y}{2z}$.

Exercice 10

1. Compléter le tableau suivant :

$+$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$		$-\frac{3}{+4}$
$\frac{1}{2}$			1	
$-\frac{5}{3}$				
	$\frac{1}{6}$			

2. En déduire la somme algébrique de chaque ligne et colonne.

Quelques sites de mathématiques pour s'exercer

http://www.mathematiquesfaciles.com/exercices/index.php?theme=fraction&totalm=1337

http://www.multimaths.net/tice/xmfractions.html