Plan du chapitre 2 :

REGLES ET OPERATIONS AVEC LES NOMBRES RELATIFS

Chap.2 REGLES ET OPERATIONS AVEC LES NOMBRES RELATIFS

I. Définitions et vocabulaire

L'ensemble des nombres relatifs est constitué de nombres positifs (plus grand que zéro, noté > 0) , de nombres négatifs (plus petit que zéro, noté < 0) et de zéro (0).

Exemples :

a. **+12,75** a pour signe + , il est plus grand que zéro ,

b. **- 36** a pour signe -, il est donc plus petit que zéro.

1. Notion de valeur absolue d'un nombre relatif

La valeur absolue d'un nombre relatif $\pm$ **a** est ce nombre sans son signe, soit : **a**

Notation **: | + a | = a et | -a | = a**

Exemple :

| **+12,75** | = 12,75 | **-12,75**| = 12,75

Remarque :

Ne pas confondre *nombres relatifs* et *entiers relatifs*

2. Nombres relatifs opposés

Deux nombres relatifs sont dits ***opposés*** s'ils ont ***la même valeur absolue*** et sont de **signes contraires**.

Exemple : **+3,14 et -3,14**

Règles :

1. **La somme** de deux nombres **relatifs opposés** est **toujours nulle**

2.Lorsque deux nombres relatifs **sont positifs**, **le plus grand** est celui qui possède la plus **grande valeur absolue**

Exemple : +17 et +4 (17 > 4)

3. Lorsque deux nombres relatifs **sont négatifs**, **le plus grand** (resp. le plus petit) est celui qui possède **la plus petite** (resp. la plus grande) **valeur absolue.**

Exemple : - 17 et - 4 (- 17 < - 4)

4. Quand un nombre relatif est positif, on a le choix de le représenter avec ou sans son signe +

Exemple : +17 et 17 sont deux écritures équivalentes.

II. Opérations avec les nombres relatifs

1. Addition de deux nombres relatifs

a. Addition de nombres relatifs de mêmes signes

Pour additionner deux nombres de mêmes signes, on conserve le signe et on additionne les valeurs absolues.

Exemples : (+4,32) + (+17) = + (21,32) = + 21,32

(-4) + (-8) = - (4 + 8) = - 12

b. Addition de nombres relatifs de signes différents

Pour additionner deux nombres de signes différents, on conserve le signe du nombre dont la valeur absolue est la plus grande et on fait la soustraction classique (nombre de plus grande valeur absolue - nombre de plus petite valeur absolue).

Exemple : (+ 4) + (- 17) = - (17 - 4) = - (13) = -13

Remarques :

Notons que zéro est l'élément neutre pour l'addition.
L'addition est commutative : on peut permuter les termes

Exercice

Déterminer les nombres A et B suivants :

A = (+14) + (-20) + (+ 6) et B = (-5) +(-7) + (+18)

2. Soustraction de deux nombres relatifs

Soustraire deux nombres relatifs, revient à faire une addition du premier nombre avec l'opposé du second.

Exemples :

A= (+5) - (+3) = (+5) +(-3) = + (5 - 3) = + (2) = + 2 = 2

B = (-5) - (+3) = (-5) + (-3) = - (5 + 3) = -(8) = -8

C= (-5) - (- 3) = (-5) + (+3) = - (5 - 3) = - (2) = - 2

Remarques :

Notons que zéro est l'élément neutre pour la soustraction
La soustraction est non commutative : on ne peut pas permuter les termes.

Exemple : (+ 2) - (+ 3) $\neq$ (+3) - (+ 2)

3. Multiplication de deux nombres relatifs

Le produit de deux nombres relatifs du même signe est toujours positif et négatif s'ils sont de signes contraires.

Exemples :

A= (+13) x (+2) = + (13 x 2) = + (26) = +26 = 26

B= (-13) x (-2) = + (13 x 2) = + (26) = +26 = 26

C= (+13) x (-2) = - (13 x 2) = - (26) = - 26

D = (-13) x (+2) = - (13 x 2) = - (26) = -26

NB : Le signe du produit de plusieurs nombres relatifs dépend du nombre de nombres négatifs :

Si ce nombre est ***pair***, alors le résultat sera **positif** :

Exemple : (- ...)x(- ....)x (- .....)x(- ....) = +(...)

Si ce nombre est **impair,** alors le résultat sera **négatif :**

Exemple : (- ...)x(- ....)x (- .....)x(- ....)x(- ......) = - (...)

Remarques :

- ***Notons que un est l'élément neutre pour la multiplication.***
- ***La multiplication est commutative : on peut permuter les termes.***
- ***Deux nombres sont dits inverses si leur produit est 1.***

Exemples : 2 x 0,5 = 1, (-10)x(-0,1) = 1 .

- Notons que tout nombre non nul admet un inverse : on obtient l'inverse d'un nombre en divisant 1 par ce nombre :

Exemples :

L'inverse de 2, c'est 1 diviser par 2, soit : $1 \div 2 = \frac{1}{2}$

L'inverse de 3, c'est 1 diviser par 3, soit : $1 \div 3 = \frac{1}{3}$.

4. La division de deux nombres relatifs

La division de deux nombres **a** et **b** avec $\mathbf{b \neq 0}$ s'écrit a ÷ b se note aussi $\frac{a}{b}$; est *définie comme la multiplication du **nombre a** par l'inverse du **nombre b**.* Soit :

$$\boldsymbol{a \div b = \frac{a}{b} = a\ x\ \left(\frac{1}{b}\right)}$$

Exemples :

(-6) ÷ 2 = (- 6) x($\frac{1}{2}$)= (-6)x(0,5)= - 3 ; 8 ÷ 4 = 8 x($\frac{1}{4}$)= 8x(0,25)= 2

Notons que le résultat du signe de la division obéit à la même règle des signes de la multiplication de deux nombres relatifs.

5. Priorités des opérations dans les calculs

L'ordre dans lequel on doit effectuer un calcul est le suivant :

1. On effectue le calcul à l'intérieur des parenthèses.

2. On effectue les multiplications et les divisions. Si plusieurs multiplications et divisions se suivent, l'ordre des opérations se fait de gauche à droite.

3. En dernier, on effectue les additions et les soustractions. Si plusieurs additions et soustractions se suivent, l'ordre des opérations se fait de gauche à droite.

Exemple :

En appliquant les règles des priorités des opérations définies et en détaillant les différentes étapes de calcul, déterminer l'expression finale du nombre A suivant :

A = (+2) - (- 1 + 5 - 16)x (-4) x (+6) + (- 9)

Réponse :

A = (+2) - **(- 1 + 5 - 16)**x (-4) x (+6) + (- 9)

= (+2) - **(-12)** x **(-24)** + (- 9)

= (+2) - **(248)** +(-9)

= - **(248 -2)** + (- 9) = (-246) +(-9)

= - **(246 + 9)** = - 255

III. Les opérations littérales

Les calculs littéraux sont des calculs dans lesquels figurent des lettres, qu'on appelle des ***variables*** ou ***inconnues***, qui désignent des nombres.

Exemple : 2a + b, ou 3x-7, etc.

Remarque :

En mathématiques, souvent en prend la **lettre x** pour désigner une inconnue dans des expressions données. Pour ne pas confondre cette lettre avec le signe multiplier **x**, on préfère remplacer ce dernier par **un point.** Au lieu d'écrire : 3xx +1, on écrira 3**.**x +1.

1. La réduction d'une expression littérale

La réduction d'une expression littérale consiste à additionner ou soustraire des lettres ou des inconnues de **mêmes familles** pour former une expression réduite.

Exemples : 3x - 5x + 25x = 23x; (-10x + 7x) - x = - 4x , 4x +2yx -3x= x +2yx

2. Le Développement d'une expression littérale

Le développement d'une expression littérale utilise la notion ***de distributivité*** ou ***de la distribution*** de ***la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction***.

Exemples :

$a(b + c) = ab + ac$ *distribution simple*

$a(b - c) = ab - ac$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ *distribution double*

$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$

Exercices d'application :

Les variables x, y, a et b sont des réels.

1. Développer et réduire les expressions suivantes :
   $A=(x + 2)(a- 1)$, $B=(3x-2y)(a + 2b)$, $C=(x + 2)(x - 2)$
2. En déduire les rapports $\frac{A+B}{C}$ et $\frac{A}{B+C}$.
3. Pour $x=+2$, $y = -3$, $a = 1$ et $b = 5$, déterminer les valeurs numériques de A, B , C et les valeurs des rapports précédents.

3. La factorisation d'une expression littérale

La factorisation consiste à faire le travail inverse de la distribution. Soit :

$$ab + ac = a(b + c)$$

Dans ce sens $\longrightarrow$ on dit on factorise.
Dans ce sens $\longleftarrow$ on dit on distribue.

Notons que le principe de la factorisation c'est la mise en facteur d'une expression, d'un ou des éléments communs.

Exemples :

Mise en facteur d'un nombre commun : $\mathbf{10}x - \mathbf{10} = 10(x - 1)$
$20x - 15y = \mathbf{5}(4x-3y)$

Mise en facteur d'une lettre ou variable commune : $\mathbf{a}x - 3\mathbf{a}y = \mathbf{a}(x - 3y)$
$3\mathbf{x}y - \mathbf{x}b = \mathbf{x}(3y - b)$

Mise en facteur d'une expression commune :

$(2x + 5)\mathbf{(x - 2)} - 3\,\mathbf{(x - 2)} = \mathbf{(x - 2)}(2x + 5 - 3) = \mathbf{(x - 2)(2}x + \mathbf{2}) = \mathbf{2(x-2)(}x + 2).$

Exercice d'application :

1. Factoriser les expressions suivantes :
   $A= (5x+4)(x-3) - (10x +8)^2$
   $B = (8x +1)(2x+4) + (x +2)(x - 2)$

Activité : les identités remarquables

Dans le cas de la distribution double de quatre nombre réels a ,b, c et d tel que :

(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd et **(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd.**

On se propose l'étude des 3 cas particuliers suivants :

- **c= a et d= b :**

$$\begin{aligned}\mathbf{(a + b)(a + b)} &= aa + ab + ba + bb\\ &= aa + ab + ab + bb\\ &= \mathbf{aa + 2ab + bb} \qquad (1)\end{aligned}$$

- **c= a et d= - b :**

$$\begin{aligned}\mathbf{(a + b)(a - b)} &= aa + ab - ba - bb\\ &= aa + ab - ab - bb\\ &= \mathbf{aa - bb} \qquad (2)\end{aligned}$$

- **c= a , b= - b et d= - b :**

$$\begin{aligned}\mathbf{(a - b)(a - b)} &= aa - ab - ba + bb\\ &= aa - ab - ab + bb\\ &= \mathbf{aa - 2ab + bb} \qquad (3)\end{aligned}$$

On obtient, en regroupant les 3 expressions (1), (2) et (3) ce qu'on appelle communément ***les identités usuelles ou remarquables :***

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b) &= aa + 2ab + bb\\ (a + b)(a - b) &= aa - bb\\ (a - b)(a - b) &= aa - 2ab + bb\end{aligned}$$

Remarques :

Nous reviendrons sur l'écriture simplifiée de ces dernières expressions littérales de ces identités remarquables, lorsque nous aborderons le calcul sur les puissances d'un nombre. Néanmoins, nous pouvons retenir :

Le produit **aa** se note $\mathbf{a^2}$ et de même **bb** se note $\mathbf{b^2}$.

Ce qui permet de simplifier et d'écrire les expressions précédentes comme :

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b) &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\\ (a - b)(a - b) &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Quelques sites de mathématiques pour s'exercer

http://www.mathematiquesfaciles.com/exercices/index.php

http://www.multimaths.net/tice/relatifs.swf

EXERCICES

Exercice 1

Calculer les différentes expressions

A= (+17) + (-4)	F=(+7) - (-5)
B= (-6) + (-5)	G= (+12) - (+5)
C= (-7) + (+3) + (- 2)	H= (+35) - (- 4)
D= (+4) + (-3) + (+2) + (- 1)	I= (-13) - (+55)
E= (-7) + (-10) + (+5) + (-1) + (+2)	J= (-25) - (- 47)

Exercice 2

Déterminer la valeur des expressions suivantes :

A = (+27) - (+53) + (-2,9) - (+13,1)
B = (-25) - (-47) - (-17,7) - (+3,7)
C = (-13) - (+55) + 17 - 32 + 56 - 32 + 12
D = (-26)+ (+ 75) - (+ 6) + (- 27) - (- 48)

Exercice 3

A = (+503) - (-343) - (-415) - (743) + (-203) + (-84)

Calculer A en faisant des regroupements astucieux.

Exercice 4

Simplifier puis calculer la valeur de A puis de B.

A = (- 5) + (3 - 2 x 4 - 6) - (- 12)
B = (+ 7,4) - [2 + (3 - 4 x 2,6)]+ (-7) + (-11)

Exercice 5

Effectuer les additions et les soustractions suivantes :

A=5,1 + 19,9	B=114,98 - 25,45	C=(-4) + (-23,5)
D =(-12,25) + (6,75)	E= (-34) - (-20)	F=(+150) - (-125)

Exercice 6

Effectuer les multiplications et divisions des nombres relatifs suivants :

a. (-5)x(+3)	b. (+13)x(-200)	c. (-2,5)x(-5,5)	d. (-12)x(+12)
e. (-1)x(-8)	f. (10,25)÷(-1000)	g. (+25)÷(-20)	h. (-15)x(-30)

Exercice 7

Calculer les suites d'opérations suivantes :

A=5 + 22 -14 + (-52) - (-3)	B=(-7) - (-21) + (-50) - (-10) + 15
C= -25 +15 - (-1) + (-5,54) - (-3,50)	D= - (-30) + (+22) - (-15) - 14,25 + (-2,75)

Exercice 8

En respectant l'ordre des priorités des opérations, calculer :

A=5x(1 - 3) B= +4 - (-5)x3 - 8 C= (2-9)x3 - 15÷(-3) D=3x(-6) + (- 14 ÷ (-2))

F=(-12) ÷ (1 - (-2)) G= (-3) x[(2 -14) + (1 - (3 - 7))] H=9 -12x(-10)+ (-5)x(20-25)

Exercice 9

1. Compléter le tableau suivant :

x	+5	-1,5	-2,5	+0,01
-2,5				
-5				
+1,5				
-0,01				

2. En déduire la somme algébrique de chaque ligne et colonne.

Exercice 10

Ramsès II fut un pharaon né en **-1304** av. JC. Il a vécu 67 ans. **Ramsès III** a vécu **32 ans** et mort en -1134 av. JC. Combien d'années séparent la date du décès de Ramsès II de celle de Ramsès III ?

Exercice 11

1. Réduire l'expression littérale suivante : E= a x a - b x b - 2(a +b)x(a -b)
2. Calculer E pour :

   a= + 2 et b= - 3

   a= - 4 et b= - 5

Exercice 12

1. Factoriser les expressions suivantes :

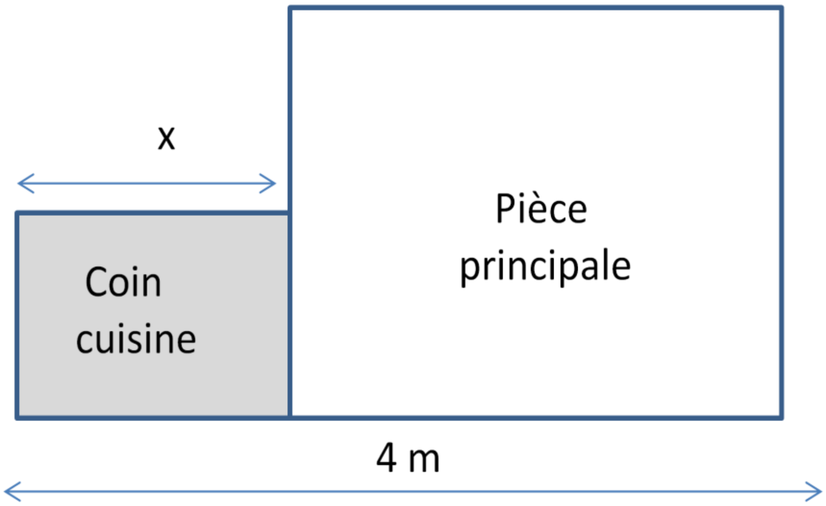
   A= (2x +10)(3-x) - (x + 5)(x-5) B=(2x+1)(x-2) + (8x +4)(x+3)

2. Calculer (A + B) et (A - B) pour x= - 5.

Exercice 13 - Factorisation et calculs d'aires

On considère l'expression suivante : E= x^2 - 4 x + 3, où x ici désigne une variable réelle.

1. Montrer que E peut s'écrire : E= $(x - 2)^2 - 1$.
2. Calculer E pour x = 1 et x = 3.
3. La figure 1 ci-dessous représente une pièce principale carrée de surface S_1 et un coin cuisine carré de surface S_2.



- Figure 1 -

a. Déterminer la surface totale notée S.
b. Réduire et factoriser l'expression de S obtenue.
c. Vérifier que : $S = 2 (E + 5)$. Evaluer S pour la valeur $x = 1$ m et en déduire les surfaces de la pièce principale S_1 et du coin cuisine S_2 .