Plan du Chapitre 1 :

INTRODUCTION AUX DIFFERENTS TYPES DE NOMBRES

Chap. 1. INTRODUCTION AUX DIFFERENTS TYPES DE NOMBRES

I. Définitions des ensembles & vocabulaire

Un ensemble selon **Georg Cantor 1845- mathématicien allemand**- est ***une collection ou un groupe*** d'objets de notre intuition ou de pensée, ***définis*** et ***distincts*** qu'on nomme ***éléments*** formant une même famille.

Exemples :

- Groupe de stagiaires de la même classe de Math.
- Ensemble des crayons de couleurs d'une trousse d'un élève.

1. Représentation d'un ensemble

On représente un ensemble de la façon suivante :

Nom de l'ensemble = { élément1 ; élément2 ; .... **}**

Exemple : l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet latin.

E= { a ; b ; c ; d ; ....; v ; w ; x; y ; z }

E = désigne ici le nom de l'ensemble et a, b, c, ..., w, x, y, z : désignent les éléments de l'ensemble E.

Remarque : un ensemble peut-être ***fini*** ou ***infini***.

2. Vocabulaire

- ***Cardinal de E***, noté **Card (E)** : désigne le nombre d'éléments de E. Ici Card (E) =26.
- ***Ensemble vide*** : désigne l'ensemble qui ne contient aucun éléments, noté { } ou **Ø.**
- ***Sous ensemble de E*** : désigne ***une partie*** de E, notée P(E).

Exemple : Soit E={ a ; b ; c }, l'ensemble { a ; c } est une partie de E

de même { a ; b }, { b ; c } etc.

Exercice :

Déterminer le nombre totale de parties de l'ensemble E={ a ; b ; c }.

- **Réponse** : P(E)= { a },{ b },{ c },{ a ; b },{ b ; c },{ a ; c }, { a ; b ; c } et { }

3. Notions et symboles mathématiques

Le symbole ***inclusion***, noté **C** signifie que les éléments a, b, c, et d sont inclus dans E ou forment **un sous ensemble** ou **une partie** de E. On note {a} C E, ou {**b}** C E, etc.

Le symbole ***appartenance,*** noté € signifie que les éléments a, b, c, et d appartiennent à E, ou sont dans E, ou sont des éléments de E. Inversement, on dit aussi que l'ensemble E possède a, b, c, d. On note : a € E, b € E, et aussi a, b, c, d € E.

NB :

on définit de la même manière ***non inclus*** et ***n'appartient pas*** respectivement par les symboles : ₵ et ∉ .

II. Les différents types de nombres et ensembles associés

Activité

Nous définissons un ensemble noté E composé de nombres réels. Chacun des nombres réels quelconques est donné par un stagiaire inscrit pour suivre ce cours de mathématiques.

Le but de cette activité est qu'à la fin du chapitre 1, chaque stagiaire inscrit devrait être capable de donner le type de chacun des nombres choisis ainsi que leurs ensembles associés.

1. Ensemble des entiers naturels, noté IN

Ce sont les tout premiers nombres naturels inventés, les plus simples et destinés à compter des objets naturels entiers. **Exemples** : 4 voitures, 30 chaises, etc.

Ils sont désignés par un ensemble ***infini et ordonné,*** noté :

IN={ 0 ; 1 ; 2 ; .... }

Remarque : L'ensemble **IN** ne contenant pas le zéro est désigné par **IN*****.**

2. Ensemble des entiers relatifs, noté Z

Ce sont des ***nombres entiers positifs***, supérieurs à zéro et ***négatifs***, inférieurs à zéro. Notons que le nombre zéro, c'est le seul nombre qui est à la fois positif et négatif. Ces nombres sont désignés par un ensemble ***infini***, ***ordonné contenant le zéro***, noté :

Z={ .... ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; .... }

Exemple : L'ensemble des variations de température annuelle de la ville de Paris.

3. Autres types de nombres - les nombres fractionnaires

Les nombres précités utilisent des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls. Il existe d'autres types de nombres qu'on nomme **fraction** ou **nombres fractionnaires**.

- **Qu'est ce qu'un nombre fractionnaire ?**

Une fraction est définie par **une division** non effectuée de deux nombres a et b , notée :

$\frac{a}{b}$, **où a Є Z et b Є N*** qui se lit "**a sur b**".

Nous pouvons aussi la définir simplement en disant qu'une fraction désigne ***le nombre de parts égales de l'unité b avec a supposé inférieur à b.***

- Etude de cas particuliers d'un nombre fractionnaire

- **Cas où b= 10, 100, 1000, etc. et a un nombre entier relatif**

Dans ce cas :

$$\frac{a}{b} = \text{NOMBRE DECIMAL}$$

Exemple : les nombres décimaux suivants : $\frac{25}{10}, \frac{2}{100}, \frac{213}{1000}, \frac{250}{10000}$

L'ensemble des nombres décimaux est représenté par la lettre ID.

NB : un nombre décimal est un nombre dont la partie décimale est finie.

- **Cas où b un entier relatif quelconque ≠ 0 et non multiple de 10**

Tout nombre qu'on peut écrire sous forme d'un quotient de deux entiers relatifs a et b avec b ≠ 0, est dit nombre RATIONNEL. Soit :

$$\text{NOMBRE RATIONNEL} = \frac{a}{b}$$

Exemple : les nombres rationnels suivants : $\frac{1}{3}, -0{,}3333333$, $\frac{1}{6}$, -- 1,6666666, etc.

L'ensemble des nombres rationnels est représenté par la lettre Q.

NB : un nombre rationnel ce sont tout les nombres dont la partie décimale est illimitée périodique - à partir d'un certain rang.

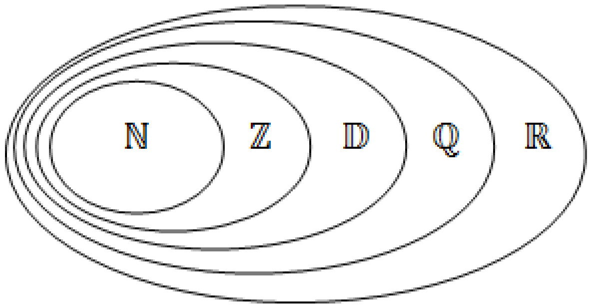
- **Cas d'un *nombre quelconque non fractionnaire***

Si un nombre quelconque **ne peut pas s'écrire** sous forme ***d'une fraction a/b avec a et b deux entiers relatifs et b≠ 0***, alors ce nombre est dit ***IRRATIONNEL.***

Exemple : les nombres rationnels suivants : π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, nombre e, etc.

L'ensemble des nombres irrationnels, rationnels positifs ou négatifs et zéro , est représenté par la lettre **IR *et dit ensemble DES NOMBRES REELS.***

Synthèse : ***N C Z C ID C Q C IR***



III. L'arithmétique des nombres - nombres premiers

L'arithmétique des nombres utilise les quatre opérations bien connues ***: l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.***

1. Notion de diviseurs d'entiers (b divise a)

On dit qu'un nombre **entier b≠0 divise** le nombre **entier a** si et seulement si :

a est un multiple de b, ou $\frac{a}{b}$ **= nombre entier**

Exemple : **2 divise 6** ≡ **6=2x3** ou $\frac{6}{2} = 3$

2. Nombres premiers - décomposition

Définition : un nombre entier est dit ***premier*** s'il admet **exactement deux diviseurs** : ***1 et lui même.***

Exemple : 2, 3, 11

*Attention ! **le nombre 1 n'est pas un nombre premier car il admet un seul diviseur : lui même.***

Exercice :

Citez tout les nombres premiers inférieurs à 30.

- **Réponse** : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

(voir aussi en exercice - **le crible d'Eratosthène** - astronome et mathématicien grec **276** av JC)

Enoncé (admis) : ***Tout entier naturel n supérieur à 2 se décompose en un produit de nombres premiers.***

Exemples :

24= 2x2x2x3

38 = 2x19

48= 2x2x2x2x3

3. Comparaison de deux nombres

Comparer deux nombres **a** et **b** **équivaut à étudier** ***le signe de leur différence*** :

Si :

a - b > 0 , on dit que **a est plus grand** que **b**

a - b < 0 , on dit que **a est plus petit** que **b**

a - b = 0 , on dit que **a est égal à b**

Exemple : **a= - 2 et b = - 4**

a - b = (-2) - (-4) = 2 > 0 donc a = - 2 est plus grand que b = - 4.

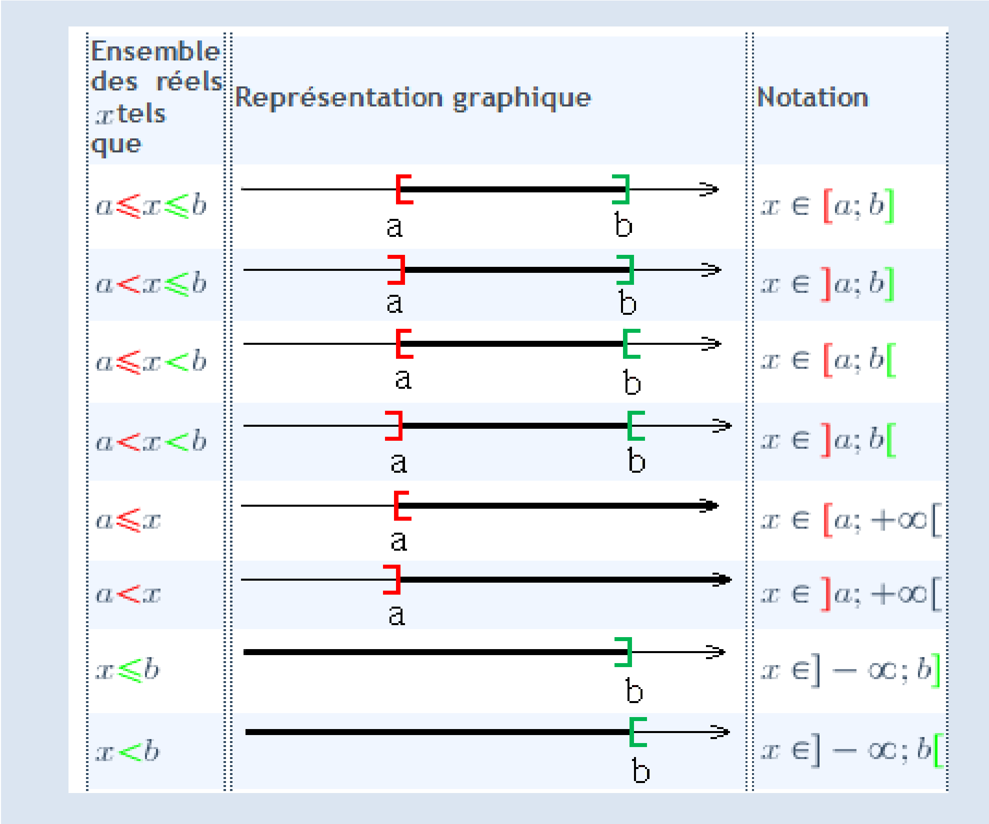
Remarque :

Comparer des nombres permet de construire une liste de nombres ordonnés par ordre croissant ou décroissant.

Exercice : ordonner la liste des nombres relatifs suivants : 3, -5, 1, 11, 0, -16, 8, 5, -3

4. Notion d'intervalle et retour sur les ensembles

On appelle **intervalle** un ensemble de nombres déterminés par *une inégalité* ou *un encadrement*. On distingue :



Ensemble des réels x tels que	Représentation graphique	Notation
$a \leqslant x \leqslant b$	a b	$x \in [a; b]$
$a < x \leqslant b$	a b	$x \in]a; b]$
$a \leqslant x < b$	a b	$x \in [a; b[$
$a < x < b$	a b	$x \in]a; b[$
$a \leqslant x$	a	$x \in [a; +\infty[$
$a < x$	a	$x \in]a; +\infty[$
$x \leqslant b$	b	$x \in]-\infty; b]$
$x < b$	b	$x \in]-\infty; b[$

Exercice :

Déterminer les ensembles **Union** et **Intersection** des ensembles I et J suivants :

$$I = [-10\,;23[\quad \text{et} \quad J = [-10\,;+\infty[$$

IV. Troncature et arrondi

1. La troncature

On définit ***la troncature à l'unité*** d'un nombre décimal positif par sa partie entière. On peut l'obtenir en supprimant tous les chiffres à la droite de la virgule.

Exemple : ***La troncature à l'unité*** de **78,637** est **78.**

On définit aussi, si on veut plus de précision - ***la troncature au dixième*** :

Exemple : La troncature **au dixième** de **78,637** est **78,6**.

Et aussi ***la troncature au centième*** :

Exemple : La troncature **au centième** de **78,637** est **78,63**.

2. L'arrondi

On définit ***l'arrondi à l'unité*** d'un nombre décimal par le nombre entier **le plus proche** de celui-ci.

Exemple : L'arrondi à l'unité du nombre **56,8** est le nombre entier **57**.

Enoncé de la règle :

Nous retenons la convention suivante pour l'arrondi des nombres décimaux :

- Si le chiffre après la virgule ***est inférieur à 5***, **on arrondit** à l'entier inférieur.
- Si le chiffre après la virgule ***est supérieur ou égal à 5***, on arrondit à l'entier inférieur + 1.

Exemple : l'arrondi à l'unité du nombre décimal **53,5** est **54**.
Pour **12,75** l'arrondi à l'unité est **13** et **12,25** l'arrondi à l'unité est **12**.

Exercice d'application

- ✓ Donner l'arrondi à l'unité et au dixième des notes de math : 12,75 et 12,50.
- ✓ Déterminer la troncature et l'arrondi respectivement à l'unité et au centième de la liste des nombres du tableau ci-après :

nombres	1,925	2,553	-7,81	3,14159	-2,1386	2,7326	-1,4148	4,1455
Arrondi à l'unité								
Arrondi au centième								
Troncature à l'unité								
Troncature au centième								

V. Apprendre à écrire un nombre en lettres

Le tableau ci-après résume l'écriture littérale des nombres usuels.

0 zéro	7 sept	14 quatorze	30 trente
1 un	8 huit	15 quinze	40 quarante
2 deux	9 neuf	16 seize	50 cinquante
3 trois	10 dix	17 dix -sept	60 soixante
4 quatre	11 onze	18 dix-huit	70 soixante-dix
5 cinq	12 douze	19 dix-neuf	80 quatre-vingt(s)
6 six	13 treize	20 vingt	90 quatre-vingt-dix
cent, mille, million, milliard			

- **Règle d'écriture des nombres composés**

1. Quand on écrit un nombre, ***on met un tiret entre tous les mots***. C'est une nouvelle règle qui simplifie tout.

Exemples : quatre-vingt-dix, vingt-sept, mille-deux-cent-trente-cinq.

2. Mettre un "s" ou non ? Je mets ***un "s" à la fin de vingt et cent lorsqu'il y en a plusieurs et qu'il n'y a pas d'autres nombres derrière.***

Exemples :

quatre-cents (4x100), cent-quatre-vingts (100+4x20), quatre-cent-quatre, quatre- vingt-seize

3. J'écris ***un "s" à la fin de million et milliard*** *lorsqu'il y'en a plusieurs même s'il y'a un autre nombre derrière*

Exemples :

trois-millions, cinq-millions-deux-cent-cinquante-mille

4. Mille est invariable, jamais de "s"

Exemples : cinq-mille, trente-sept-mille-neuf-cents

Exercice *- en option -*

Les nombres nous servent au quotidien, comme des points fondamentaux de références et nous orientent dans la prise de décision dans notre vie. A chacun de nous de donner ou d'estimer leur importance.

A la suite de ce cours d'introduction, les élèves, je l'espère, ont acquis une bonne compréhension pratique des nombres et de leurs ensembles associés. **Il serait intéressent, pour tout un chacun qui le souhaite,** de compléter sur la base de ce cours la partie histoire des nombres. Vous-y trouverez matière à étude passionnante et vous serez stupéfaits ! Bon courage et amusez-vous bien ...

Questions de cours - durée 15 mn

Définition d'un ensemble

1. Qu'est ce qu'un ensemble et un sous-ensemble ? Donner des exemples.

2. Définir les cinq grands ensembles que vous connaissez.

3. La somme et la différence de deux nombres entiers naturels donnent-elles toujours des nombres entiers naturels ? Donner un exemple.

4. Le quotient de deux nombres entiers donne-il toujours un nombre entier ? Expliquer.

Réponse :

QCM : LES DIFFERENTS TYPES DE NOMBRES

1. Le nombre $58 + \frac{2}{100} + \frac{4}{1000}$ à pour partie entière :
a. 580 b. 5824 c. 58 d. 58,024

2. L'arrondi au centième de 68,6738 est :
a. 69 b. 68,67 c. 68,74 d. 68,70

3. Deux - cent - quarante - trois et deux centièmes à pour écriture décimale :
a. 243,2 b. 243,02 c. 243 d. 243,2

4. La différence de 4,11 et de 2,98 est :
a. 1,03 b. 2,13 c. 2,33 d. 1,13

5. Le chiffre des centièmes de 2,405 est :
a. 4 b. 2 c. 5 d. 0

6. Quel(s) nombre(s) est (sont) inférieur(s) à 5,03 ?
a. 5,003 b. 5,030 c. 5,029 d. 5,009

7. La somme de 14,183 et de 5,982 arrondie au millième est :
a. 20,165 b. 20,065 c. 21,165 d. 20,265

8. Trois kilogrammes de pommes coutent 2,64 euros. Quel sera le prix payé pour deux kilogrammes de pommes ?
a. 1,80 b. 1,760 c. 1,70 d. 1,67

9. On ajoute 1,33 à un nombre pour obtenir 5. Quel est ce nombre ?
a. 3,65 b. 6,33 c. 3,67 d. 3,77

10. Qu'elle est la somme des quatre nombres premiers inférieurs à 10 ?
a. 15 b. 10 c. 8 d. 17

EXERCICES

Exercice 1

Calculer les expressions suivantes :

A = 2 × 3 + 3 × 5
B = 2 + 3 × 3 + 5
C = 2 + 3 × 3 × 5
D = 2 × 3 × 3 + 5

Exercice 2

Les égalités suivantes sont-elles vraies ? (justifier)
Si non, placer des parenthèses pour les rendre vraies.
5 × 24 + 30 = 270 ; 9 × 21 - 10 = 179 ; 5 × 4 + 3 × 9 = 155.

Exercice 3

Calculer de deux façons différentes :

2 × (5,3 + 4,8) ; 3 × (5,6 - 4,3)

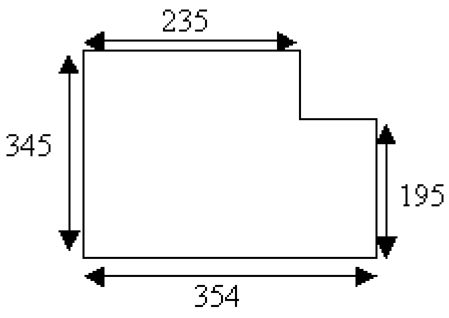
Exercice 4

On distribue à chaque élève trois livres de français, deux livres d'anglais et un livre de mathématiques.
Calculer de deux façons le nombre de livres distribués à une classe de 25 élèves.

Exercice 5

La quincaillerie **LAPERCEUSE** propose en promotion une perceuse **90 euros** hors taxes; VISMARCHE, les mercenaires de la distribution vendent la même perceuse **100 euros** toutes taxes comprises. Quel est le prix le plus avantageux ? (T.V.A. 19,6 %)

Exercice 6



Calculer l'aire et le périmètre de ce terrain désigné par cette figure.
Les mesures représentées ici sont données en mètres.

Exercice 7

Donnez la liste des nombres premiers inférieurs à 100 (**Crible d'Eratosthène - 275 av JC**)

Nous rappelons qu'un nombre premiers est un nombre qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui même.

NB : 1 n'est pas un nombre premier

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 8 : définition d'un ensemble

1. Qu'est ce qu'un ensemble et un sous-ensemble ? Donner des exemples.
2. Définir les cinq grands ensembles que vous connaissez.
3. La somme et la différence de deux nombres entiers donnent-elles des nombres entiers ? Donner un exemple.
4. Le quotient de deux nombres entiers donne-il toujours un nombre entier ? Expliquer.

Exercice 9 : calcul mental

Effectuer mentalement les calculs suivants :

a. 12x12 + 12x24 b. -5x11 +12x5, c. 15x20 + 9x9
d. 4x9 - 4x6 e. - 9x100 + 4x25 f. -120x5 - 120x10.

Exercice 10 : écriture en lettres/chiffres des nombres

1. Ecrire en lettres les nombres suivants :

a. 81 ; 82 ; 83
b. 120 ; 224 ; 781
c. 1 328 ; 1200, 2013
d. 22 000 ; 130 680 ; 224 600
e. 65 450 237 ; 7 630 224 356.

2. Ecrire en chiffres les nombres suivants :

a. quatre-vingt-dix mille-cent-trente-cinq,
b. quatre-cent-vingt et un,
c. trente-quatre-mille-un

Exercice 11 : division euclidienne

Calculer les divisions suivantes :

a. $235 \div 6$, b. $3587 \div 45$, c. $2618 \div 16$.

Exercice 12 : diviseurs & multiples

Corriger et donner la bonne Réponse des propositions suivantes :

a. 3 est un multiple de 15
b. 10 est un diviseur de 120
c. 21 a pour diviseurs 7, 2 et 3
d. 28 est un multiple de 4, 8, 5 et 280
e. 5 est le diviseur de 15, 25, de leur différence et de leur produit.

Exercice 13 : nombres premiers & décomposition

1. Rappeler la définition d'un nombre premier et citer des exemples.

2. Décomposer 38 et 14 en un produit de nombres premier. En déduire si possible leurs diviseurs communs.

3. On dit que deux nombres sont ***premiers entre eux*** si leur ***seul diviseur commun est 1***.

Exemple : 14 ses diviseurs sont les entiers : **1**, 2, 7 et 14 de même **15** ses diviseurs sont les entiers : **1**, 3, 5 et 15. Donc seul 1 est diviseur commun de **14** et **15**. Ces derniers sont dits premiers entre eux.

Application : Les nombres suivants sont-ils premiers entre eux ?

a. 14 et 31, b. 5 et 12, c. 5 et 15,
d. 16 et 28, e. 16 et 25, f. 63 et 210.

Exercice 14 : ordonner une liste de nombres

Ordonner les listes des nombres suivants en utilisant les signes $<$ et $>$:

a. par ordre décroissant : -4 ; $+3{,}14$; $-1{,}414$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{4}$; 13 ; $+11$; $-1{,}41$; 19.

b. par ordre croissant : $\frac{1}{3}$; $-\frac{7}{3}$; $-\frac{3}{2}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{4}{3}$; $-\frac{5}{2}$.

Exercice 15 : troncature et arrondi

1. Donner le chiffre des dizaines, des unités, du dixième, du centième du nombre 358,264.

2. Qu'appelle-on troncature et arrondi d'un nombre respectivement à l'unité, au dixième et au centième. Déterminer alors les différentes formes d'écritures du nombre 358,264.

3. Arrondir à l'unité et compléter le tableau suivant :

1,9	2,3	3,9	-7,8	1,55	-3,501

4. Arrondir au centième et compléter le tableau suivant :

3,14159	-2,1378	13,240	5,667	0,33399	4,1455