Pré-Requis & Mise à Niveau
Mathématiques du Secondaire

H. DERFOUL

Janvier 2018

-_-

Sommaire

Chapitre 0
Pré-requis et mise à niveau
Partie VI

Exercices

1.

Déterminer l'équation de la droite (AB) passant par les points A et B de coordonnées :

a) A(0 ; 4) , B(1 ; 6).
b) A(1 ; 4) , B(2 ; -4).
c) A(0 ; -4) , B(-3 ; 6).
d) A(0 ; 4) , B(3 ; 5).

2.

Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection des droites D et D' suivantes :

a) (D) : y=2x-7 et (D') : y=3x+2.
b) (D) : $y=\frac{2}{3}x-5$ et (D') : $y=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}$.

3.

Soient trois points de coordonnées A(2 ; 4), B(-4 ; 2) et C(4 ; -2).

a) Calculer les distances AB et AC.
b) Déterminer les équations des droites (AB) et (AC).
c) Quelle est la nature du triangle ABC ?
d) Calculer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un carré.
e) Déterminer le centre du cercle circonscrit à ce carré ? Calculer son rayon.

4.

On considère respectivement deux droites (D_1) et (D_2) d'équations : y=2x+3 et y=ax-7, où a désigne le coefficient directeur de la droite (D_2).

a) Déterminer a pour que les droites (D_1) et (D_2) soient perpendiculaires.
b) Quelle est l'équation de la droite (D_3) passant par le point A(3 ; -1) et parallèle à (D_1) ?
c) Quelle est l'équation de la droite (D_4) passant par le point B(2 ; -4) et parallèle à (D_2) ?
d) Les quatre droites se coupent en formant un quadrilatère EFGH. Quel est sa nature ?
e) Déterminer les équations des diagonales et les coordonnées du centre de symétrie I de ce quadrilatère.

5.

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $x^2=\frac{1}{2}$ et $x^2=\frac{1}{3}$.

b) $4x^2-x-3=0$.

c) $6x^4-5x^2+1=0$.

d) $(x+3)^2-4=0$.

e) $2(2x+3)^2-(2x+3)-6=0$.

6.

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $-2x^2+7x-5<0$, b) $(x^2+2x+1)^2<16$, c) $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10}>0$.

7.

a) On dispose d'une règle en bois double décimètre. On cherche à connaître où briser cette règle pour que les morceaux obtenus notés respectivement l et l' soient deux côtés consécutifs d'un rectangle de surface 50 cm^2.

b) Que deviennent l et l' pour une surface de 40 cm^2.

8.

L'aire d'un triangle rectangle est de 429 cm^2 et l'hypoténuse a pour longueur h=72,5 cm. Quel est le périmètre de ce triangle ?

9.

Trouver deux nombres réels x et y dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

10.

On achète pour 40 € d'essence à une station service. On s'aperçoit qu'à une autre station, le prix du litre d'essence est inférieur de 0,10 €. On aurait pu ainsi obtenir 5 litres de plus pour le même prix.

a) Combien de litres en avait-on acheté ?

b) Quel était le prix du litre d'essence à la première station service ?

11.

Résoudre dans l'ensemble IR les équations suivantes :

a) $\cos^2(2x)=\frac{3}{4}$, b) $\sin^2(2x)=\frac{1}{2}$, c) $\cos(2x)=4\cos(x)-\frac{3}{2}$.

12.

Résoudre dans l'ensemble IR les équations trigonométriques suivantes :

a) $\cos(3x)=\cos(x+\frac{\pi}{4})$, b) $\sin(2x)=\sin(\frac{2\pi}{3})$, c) $2\sin(2x)=\sqrt{2}$,

d) $\sin(x)=\cos(2x)$, e) $2\cos^2(x)-3\cos(x)=-1$, f) $2\sin^2(x)+5\sin(x)=4$.

13.

Démontrer que pour tout réel x , on a :

a) $\cos^4(2x)-\sin^4(2x)=\cos(4x)$ b) $\operatorname{tg}(2x)=\dfrac{2\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)}$.

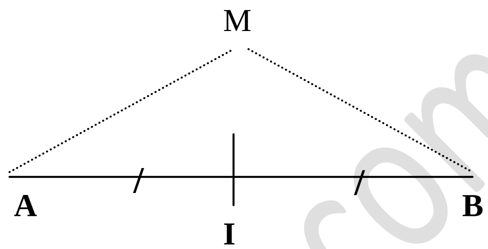
14.

En utilisant la relation de Chasles, montrer que pour trois points quelconques distincts A, B et M du plan , on a :

$$\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{BA}.$$

15. Théorème de la médiane

Soient deux points distincts A et B de la figure ci-après et M un point n'appartenant pas à la droite (AB).



Montrer que si le point I est le milieu du segment [AB] alors on a pour tout point M :

a) $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=2\overrightarrow{MI}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$.

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2$.

16.

On considère deux points A et B distincts du plan et I le point milieu de [AB].
Montrer que pour tout point quelconque M du plan distinct de A et B, on a :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA}$.

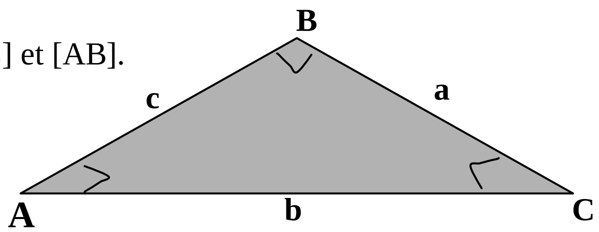
Le point H ici désigne le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

17. Théorème d'Al Kashi (Mathématicien Perse 1380-1429)

On considère le triangle quelconque ABC de la figure ci-dessous.
On note respectivement par :

a, b, c les distances des segments [BC], [AC] et [AB].

$\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les angles BAC, ABC et ACA.



a) Montrer que l'aire S du triangle ABC est donnée par :

$$S=\frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A})=\frac{1}{2}ba\sin(\widehat{C})=\frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}).$$

b) En déduire de ce qui précède la relation suivante :

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{a}=\frac{\sin(\widehat{B})}{b}=\frac{\sin(\widehat{C})}{c}.$$

c) Montrer qu'en utilisant la définition du produit scalaire de deux vecteurs, le théorème d'Al Kashi suivant :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{A}).$$

18. Application du produit scalaire de deux vecteurs

Soit $A(x_0\ ;\ y_0)$ le point d'application du vecteur $\overrightarrow{AM}$ du plan rapporté à repère orthonormé. M désigne un point quelconque de coordonnées M(x ; y).

a) Déterminer l'équation de la droite (AM) passant par les deux points A, M et perpendiculaire au vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b)$, où a et b désignent deux nombres réels.

b) Montrer que $\overrightarrow{V_d}$ (-b ; a) est le vecteur directeur de la droite (AM).

c) Que devient cette droite pour a=1, b=-2 et A(1 ; 3) ? Tracer son graphe.

19. Equation d'un cercle

On considère un cercle (C) de centre $\Omega(-2{,}1)$ et de rayon r=2.

a) Quelle est l'ordonnée y positive du point A d'abscisse x=-1 ?

c) Déterminer l'équation de la tangente à (C) au point A.

d) En déduire la norme du vecteur normal à cette tangente.

20. Barycentre de deux points

a) Déterminer le barycentre I du système de deux points pondérés (A,3) et (B,-2). En déduire que les trois points A, B et I sont alignés.

b) Soit (C,1) un point pondéré du triangle résultant ABC. Quel est le barycentre G de ce nouveau système

c) Que devient le point G si tous les coefficients de pondération sont égaux. Construire G.

21. Barycentre de trois points

Soient trois points pondérés par des coefficients réels $(A,2\alpha)$, (B,α) et (C,α) situés sur un cercle de rayon R, formant un triangle isocèle de sommet A et de base BC de longueur a. La distance AB=AC=2a.

a) Déterminer le barycentre noté G du système .

b) Construire la figure géométrique correspondant à ces points.

c) En déduire le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC.

Contrôle des connaissances N°1

Exercice 1

1°

Soit (D) la droite d'équation $y=ax+b$, où les coefficients a et b désignent des nombres réels.

On appelle respectivement $\vec{V}_{//}(1;a)$ et $\vec{V}_{\perp}(a;-1)$ le vecteur directeur et le vecteur normal de la droite (D).

a) Montrer qu'en utilisant la définition du produit scalaire de deux vecteurs : $\vec{V}_{//}.\vec{V}_{\perp}=\vec{0}$.

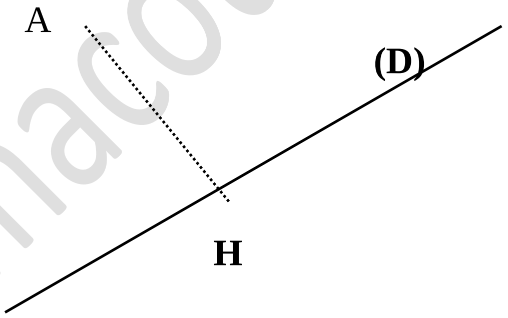
b) On considère (D') la droite d'équation $y=a'x+b'$, où les coefficients a' et b' désignent des nombres réels. Montrer que :

$$(D)//(D') \Leftrightarrow a=a' \quad \text{et} \quad (D)\perp(D') \Leftrightarrow aa'=-1.$$

2°

On considère le schéma de la figure suivante :

$A(x_a\,;\,y_a)$ un point du plan .
H le point projeté de A sur la droite (D).



Montrer de ce qui précède que la norme ou la distance HA est donnée par :

$$HA=\frac{|ax_a-by_a+b|}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Exercice 2

On pose $t=tg(\frac{x}{2})$, où x désigne une variable réelle.

a) Montrer à l'aide des formules trigonométriques du cours des fonctions $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$, qu'on peut écrire :

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}.$$

b) Pour qu'elles valeurs de t a-t-on $\cos(x)-\sin(x)=0$?
c) En déduire la ou les valeurs de la variable réelle x.

Contrôle des connaissances N°2

Exercice 1

Soient deux points A et B du plan (P) de coefficients de pondération respectivement α et β.
On note par M un point quelconque du plan P et G le barycentre de A et B.

1) Montrer que si $\alpha+\beta\neq 0$ on a :

$$\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}.$$

2) On considère $\alpha=2$, $\beta=1$ et la distance AB=6cm.
   a) Déterminer la position du point G. En déduire que A, B et G sont alignés.
   b) Quel est l'ensemble des points M du plan tel que $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$?
   c) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=$ AB ?
   d) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=$ 3AB ?

Exercice 2

On considère dans l'espace deux points de cordonnées A(x_0 ;y_0 ; z_0) et M(x ; y ; z). On note par $\vec{n}(a;b;c)$ le vecteur directeur de la droite (AM).

a) Montrer que l'ensemble des M de l'espace vérifie le système d'équations suivant :

$$\forall \text{ k un nombre réel quelconque, on a : } \begin{cases} x=x_0+ak \\ y=y_0+bk \\ z=z_0+ck \end{cases} \qquad (E)$$

b) On pose A(3 ; 2 ; -1) et $\vec{n}(1;1;1)$. Que devient le système (E) ? Préciser la nature de cet ensemble.