Pré-Requis & Mise à Niveau Mathématiques du Secondaire

H. DERFOUL

Janvier 2018

-_-

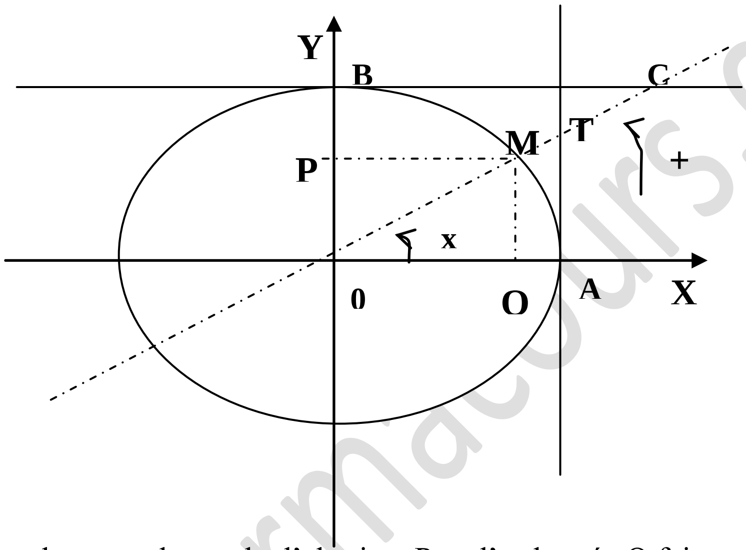
Sommaire

Chapitre 0
Pré-requis et mise à niveau
Partie IV

IV. Le cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique ***un cercle orienté de rayon égal à l'unité*** et ***dont le sens de parcours des angles est donné par le sens inverse des aiguilles d'une montre***.

Considérons le cercle trigonométrique de la figure suivante :



A un point M quelconque du cercle d'abscisse P et d'ordonnée Q faisant un angle x avec l'axe OX, on associe les fonctions circulaires suivantes :

$\cos(x)=OQ, \quad \sin(x)=OP, \quad tg(x)=AT, \quad cotg(x)=BC.$

Les fonctions cosinus et sinus de l'angle x ainsi obtenues représentent respectivement les projections orthogonales du point M sur les axes OX et OY. Par contre, les fonctions tangente et cotangente de l'angle x représentent respectivement, en raison de la nature semblable des triangles OQM et OAT, les droites tangentes au cercle aux points A et B.

Les fonctions ainsi définies sont *périodiques*, $f(x+T)=f(x)$, de période $T=2\pi$ pour les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ et $T=\pi$ pour les fonctions $tg(x)$ et $cotg(x)$.

Nous déduisons facilement pour ces raisons de périodicité des fonctions circulaires pour un angle α quelconque :

$$\boxed{\cos x=\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\alpha+2k\pi \end{cases} \quad \text{avec } k\in Z}$$

$$\sin x = \sin \alpha \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \text{avec } k \in Z$$

$$tgx = tg\alpha \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k\pi \\ avec \\ k \in Z \end{cases}$$

- **Valeurs particulières de quelques angles remarquables**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
tg(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	infini	0
cotg(x)	infini	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	infini

- **Relations trigonométriques fondamentales**

Des considérations géométriques, de symétries axiales (axes OX, OY) et centrale opérées sur la figure du cercle trigonométrique précédent permettent de définir les relations trigonométriques suivantes :

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ tgx = \frac{\sin x}{\cos x},\quad cotgx = \frac{1}{tgx}}$$

En considérant la symétrie d'un point M par rapport à l'axe OX, on obtient :

$$\boxed{\cos(-x) = \cos(x),\quad \sin(-x) = -\sin(x),\quad tg(-x) = -tg(x),\quad cotg(-x) = -cotg(x)}$$

En considérant la symétrie d'un point M par rapport à l'axe OY, on obtient :

$$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos(x),\quad \sin(\pi - x) = \sin(x),\ tg(\pi - x) = -tg(x),\quad cotg(\pi - x) = -cotg(x)}$$

En considérant la symétrie centrale d'un point M par rapport à l'origine O, on obtient :

$$\boxed{\cos(\pi + x) = -\cos(x),\ \sin(\pi + x) = -\sin(x),\ tg(\pi + x) = tg(x),\ cotg(\pi + x) = cotg(x)}$$

De la même façon, on obtient :

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$,	$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$,	$tg(\frac{\pi}{2}-x)=cotg(x)$,	$cotg(\frac{\pi}{2}-x)=tg(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin(x)$,	$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(x)$,	$tg(\frac{\pi}{2}+x)=-cotg(x)$,	$cotg(\frac{\pi}{2}+x)=tg(x)$

- **Fonctions circulaires de la somme et/ou différence d'arguments**

Pour deux angles quelconques a et b, nous avons :

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$	et	$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$	et	$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

On en déduit que :

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb} \quad \text{et} \quad tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tgatgb}.$$

D'autre part, en faisant la somme ou la différence des relations ci-dessus, on obtient :

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$$

Si a=b, ces relations deviennent :

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a \quad , \quad \sin(2a)=2\sin a\cos a \quad , \quad tg(2a)=\frac{2tga}{1-tg^2 a}$$

Nous déduisons de ce qui précède les formules de linéarisation suivantes :

$$\cos^2 a=\frac{1}{2}(1+\cos 2a) \quad \text{et} \quad \sin^2 a=\frac{1}{2}(1-\cos 2a)$$

- **Somme et différence de deux fonctions trigonométriques**

Posons le changement de variables suivant :

a+b=p et a-b=q .

Les relations précédentes donnent :

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \quad \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\boxed{\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}, \qquad \sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}p+\operatorname{tg}q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}p-\operatorname{tg}q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}}$$