Plan du chapitre 7 :
LA CINEMATIQUE DU POINT

Chap. 7 : LA CINEMATIQUE DU POINT

1. Qu'est ce que la cinématique du point ?

La cinématique est l'étude du mouvement d'un corps sans s'intéresser aux causes qui le produise. Plus spécifiquement, c'est pouvoir déterminer à chaque instant les paramètres caractéristiques de ce corps qui sont : la position, la vitesse, l'accélération et la trajectoire.

- Par opposition au terme cinématique, la dynamique est l'étude des causes du mouvement. En d'autres termes, les forces.

Pour décrire le mouvement de tout corps de masse m, nous assimilons en première approximation ce corps, à un point matériel M de masse m représentée en son centre de gravité.

D'autre part, pour décrire mathématiquement les caractéristiques de tout mouvement nous utiliserons un repère liés au référentiel d'observation choisi qu'il faut toujours soigneusement précisé dans toute étude.

Par repère ou référentiel, on désigne généralement un système d'axes (O, x, y, z) orthonormés d'origine O.

Remarques :

- Le repère souvent utilisé est le repère naturel dit de "Laboratoire".
- Postulat de la cinématique classique : la durée d'un évènement donné ne dépend pas du référentiel d'observation choisi : $\Delta t = \Delta t'$. Ce qui n'est pas vrai en cinématique relativiste.

Dans ce qui suit, nous passerons en revue trois types de mouvements :

- Le mouvement rectiligne uniforme
- Le mouvement rectiligne uniformément varié
- Le mouvement circulaire uniforme

2. Les grandeurs cinématiques

1. La trajectoire

En cinématique, la trajectoire désigne la courbe décrite par l'objet ou point matériel **M** lors de son mouvement. Sa forme dépend du référentiel **R** choisi. Elle est décrite mathématiquement par une équation.

Exemple : un point **M** se déplace suivant deux axes **Ox** et **Oy** suivant :

$\mathbf{X} = 100\,\mathbf{t}$ et $\mathbf{Y} = 500\,\mathbf{t}$

Son équation de la trajectoire est la droite : $\mathbf{Y} = 5\,\mathbf{X}$.

2. Le vecteur position

On définit la position d'un mobile **M** à chaque instant **t** par son vecteur position de cordonnées **x, y** et **z**. Par exemple dans la figure 1, on donne aux instants $\mathbf{t_1}$ et $\mathbf{t_2}$ les vecteurs positions représentés par : $\overrightarrow{0M_1} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{0M_2} = (x_2, y_2, z_2)$.

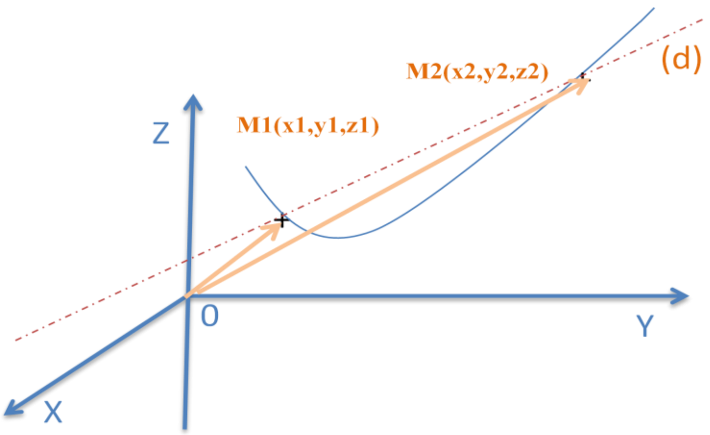

Figure 1 : positions d'un mobile M en fonction du temps t.

Exemple : Dans le repère (O, X, Y, Z), la position d'un point M est définie à chaque instant t, par les équations horaires suivantes :

$$x = 2t \; ; \; y = 4t + 3; \qquad z=0$$

L'équation de sa trajectoire est la relation : **y=2t + 3.**

3. Le vecteur vitesse

Soit $\mathbf{M_1}$ la position du point mobile M à l'instant $\mathbf{t_1}$ et $\mathbf{M_2}$ la position du point mobile M à l'instant $\mathbf{t_2}$. On définit le vecteur vitesse moyenne par :

$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$$

Lorsque t_2 **tend vers** t_1, on obtient **la vitesse dite instantanée** :

$$\vec{v} = \lim \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} \text{ lorsque } t_2 \text{ tend vers } t_1 \text{ , ou } \qquad \vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Notons que la vitesse instantanée d'un point M, nommée communément par vitesse, est à chaque instant tangent à sa trajectoire. Mathématiquement, cette vitesse représente la pente de la droite tangente à chaque instant t et en chaque point M à la trajectoire du mobile.

- **NB : L'unité de la vitesse est le mètre par seconde : m/s**

4. Le vecteur accélération

Par accélération définie par le vecteur $\vec{a}$ représente la variation du vecteur vitesse au cours du temps. De la même façon, on définit par accélération moyenne :

$$\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Lorsque t_2 **tend vers** t_1, on obtient **l'accélération dite instantanée** :

$$\vec{a} = \lim \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$ *lorsque t_2 tend vers t_1.* ou $$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt}$$

- **NB : L'unité de l'accélération est le mètre par seconde x seconde : m/s^2**

Remarque :

- D'un point de vue mathématique, **la vitesse** désigne aussi **la dérivée première** du **vecteur position** par rapport au temps et l'accélération **la dérivée seconde** par rapport au temps.

3. Applications de la cinématique à quelques mouvements simples

Nous allons décrire deux types de mouvements : les mouvements rectilignes - uniforme et uniformément variés - et le mouvement circulaire.

1 . Les mouvements rectilignes

Par mouvement rectiligne, on désigne des mouvements dont la trajectoire est une ligne droite.

La plus simple des trajectoires est donnée par l'équation horaire :

x = f(t), où **f** désigne une fonction du temps **t.**

On suppose dans ce cas, que le mobile M se déplace suivant l'axe des abscisses OX.

Les deux paramètres cinématiques vitesse et accélération deviennent :

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} \quad \text{ou} \quad v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} \quad \text{ou} \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

On distingue deux cas :

- **1er cas : le mouvement rectiligne uniforme**

Lorsque l'accélération d'un mobile M est nulle, sa vitesse dans ce cas est constante en direction et sens. On dit que le mouvement est rectiligne uniforme.
Son équation horaire se simplifie pour donner :

$$x = v\,t + x_0$$ avec $\mathbf{x_0}$ la position initiale à **t=0**.

Exemple : une météorite parcourt dans l'espace **600 km** en **2h** suivant un mouvement rectiligne uniforme. Qu'elle est sa vitesse ?

- **2ème cas : le mouvement rectiligne uniformément varié**

Lorsque l'accélération d'un mobile M est constante en direction et sens supposée égale à a, sa vitesse dans ce cas est variable. On dit que le mouvement est rectiligne uniformément varié.

Son équation horaire se simplifie pour donner :

$$x = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t + x_0$$

avec v_0 **est la vitesse initiale du mobile M.**

Si a est positif le mouvement est dit accéléré.
Si a est négatif le mouvement est dit retardé.

Exemple : A un instant t=0, une voiture démarre. Son mouvement est rectiligne uniformément varié. Elle atteint la vitesse de 72 km/h en 10s. Qu'elle est la valeur de son accélération ? En déduire sa vitesse et sa position au bout de 15 mn.

2 . Le mouvement circulaire uniforme

Un mouvement est dit circulaire si sa trajectoire est un cercle. Il est dit circulaire uniforme si l'intensité de sa vitesse est constante.

Dans ce qui suit, nous allons décrire le mouvement circulaire uniforme.

Nous considérons un point **M** de trajectoire circulaire aux différents instants $\mathbf{t_1}$ et $\mathbf{t_2}$ proches de positions respectives $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ représentés par la figure 2.

On note par **S** l'arc de cercle représenté par M_1M_2 et l'angle $\boldsymbol{\theta = \theta_2 - \theta_1}$.

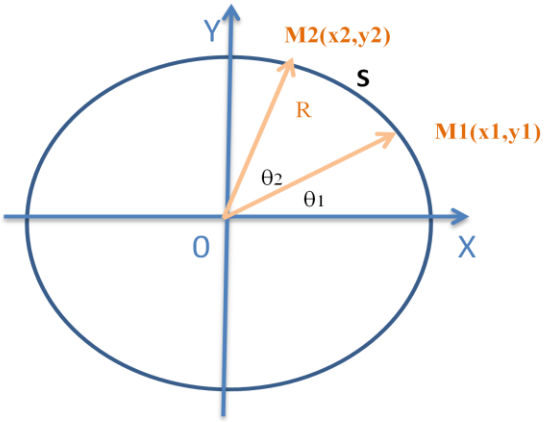

Figure 2 : mouvement circulaire et positions d'un mobile M en fonction du temps t.

Pour des instants t_1 et t_2 très proches, le bout de trajectoire S décrit par la figure 2 est donné par le théorème de Pythagore :

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = R\sqrt{(\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))^2 + (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))^2}$$

$$S = 2R\sqrt{\sin^2(\theta_2 + \theta_1)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2(\theta_2 + \theta_1)} \approx R.\theta$$

Au final, la corde M_1M_2 se confond avec l'arc du cercle pour des instants ou angles très proches.

En posant : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ qui désigne **la vitesse angulaire instantanée** qui s'exprime en radian par seconde (rad/s), la vitesse v instantanée s'écrit :

$$v = R\,\omega$$

Remarquons ici que v et ω sont des constantes : mouvement circulaire uniforme.

Que peut-on dire alors de son accélération ?

Par définition, l'accélération est la dérivée seconde de la position par rapport au temps. Ce qui donne :

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = R\,\omega^2 = \frac{v^2}{R} = constante$$

On obtient dans ce cas, ce qu'on appelle une accélération normale.

NB : Bien que l'accélération ne soit pas nulle ici on parle d'un mouvement circulaire uniforme. Pourquoi ? La simple raison est que la construction du vecteur accélération présente deux composantes : une tangentielle suivant la direction de la vitesse et l'autre normale ou centrale, le long du rayon R du cercle -figure2- . Dans ce cas, l'accélération tangentielle qui nous renseigne sur la nature du mouvement est bien nulle car la vitesse est constante. L'accélération normale quant à elle, nous renseigne sur la courbure de la trajectoire, qui est donc ici bien différente de zéro.

Conclusion :

Tout mouvement circulaire uniforme possède une accélération dite centrale ou normale à la vitesse donnée par la formule :

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}} = constante$$

Exercice :

Dans le cas de la figure 2, on suppose que les coordonnées du point **M** données par :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}\cos(\boldsymbol{\theta}) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{R}sin(\boldsymbol{\theta})$$

Retrouver l'ensemble des grandeurs cinématiques **vitesse** et **accélération** données précédemment. Faire une analyse et une représentations de ces vecteurs sur un schéma.

-_-

Activité - Période et fréquence de révolution d'un mouvement circulaire.

Quelle est le relation entre la période et la fréquence d'un mouvement circulaire ?

- **Période de révolution**

La période de révolution notée T est la durée que fait un point M pour faire un tour complet. Si à l'instant t= 0 et θ=0, l'équation horaire est : $\theta = \omega\ t$, après un tour t= T et $\theta = 2\pi$, on a :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

T en seconde et ω en rad/s

- **Fréquence de révolution f**

La fréquence de révolution notée f exprimée en **Hertz (Hz)** est **le nombre de tours** que fait un point M en une seconde. En T seconde, M effectue 1 tour, soit :

$$f = \frac{1}{T}$$

- **Relation entre ω et f**

La relation entre **ω** et f est :

$$\omega = 2\pi f$$

EXERCICES

Exercice 1 :

1. Quelle sont les grandeurs constantes dans le cas :
   a. D'un mouvement rectiligne uniforme.
   b. D'un mouvement circulaire uniforme.

Exercice 2 :

1. Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R:

a. Qu'elle la relation entre le module de la vitesse linéaire $\vec{v}$ et la vitesse angulaire ω ?

b. Pourquoi le module du vecteur accélération $\vec{a}$ n'est-il pas constant ? Exprimer son module en fonction de ω.

Exercice 3:

1. Définir les vecteurs vitesses et accélération d'un mobile de masse m considérée ponctuelle et située dans le plan (O, X, Y) au point M(x ; y).

2. On suppose le long de l'axe OX, la masse m se déplace avec une accélération constante. Qu'elle est l'équation horaire, notée x=f(t) de ce mouvement rectiligne.

3. A l'intant **t= 0**, on suppose que la vitesse et la distatance initiales sont nulles. Que devient l'équation précédente x=f(t).

4. On suppose que l'accélération du point M est de 2 m/s^2.

a. Determiner la distance parcourue en 100 m.

b. Quelle la vitesse du point M à cet instant.

Exercice 4:

On réalise l'expérience consistant à relever l'abscisse x d'un mobile M en fonction du temps. Dans le tableau ci-dessous sont reportés les résultats de cette experience.

t(s)	0	1	3	10	6	8	12	14	20
x (m)	1	4	7	12	12	12	10	6	2

1. Représenter graphiquement x= f(t). Expliquer la nature de ce mouvement.

2. Déterminer pour chaque phase du mouvement les intensités des vitesses et accélérations ainsi que les équations horaires.

3. En déduire les intensités de la vitesse aux instants t= 2s, 7s et 15s. Que peut-on conclure.

Exercice 5:

un véhicule démarre sur autouroute à l'instant t=0 s et s'arrête à l'instant t= T.

1. Entre ces deux instants, le mouvement peut-il être uniquement uniforme ? justifier votre réponse.

2. Après un temps de pause de 15mn après 2h de route, le véhicule redémarre et atteint son accélération de 2 m/s^2 en 10 s. Quelle est alors sa vitesse à cet instant ?

3. En déduire sa distance par rapport à son point d'arrêt.

Exercice 6 :

Un mobile M est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire $\omega = 4\,rad/s$, sur une trajectoire de rayon R= 3m.

1. Donner l'équation horaire de l'angle angulaire θ en fonction du temps t, en suppossant qu'à l'instant t=0 , θ(0)=0.

2. En rappelant les formules citées en cours, calculer le module des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$.

3. Calculer la période de révoltion T et en déduire sa fréquence f.

4. On choisit le centre du cercle comme l'origine O d'un repère orthonormé d'axes OX et OY.

   a. Déterminer les coordonnées x et y du mobile M dans ce repère.

   b. Déterminer les coordonnées de son vecteur vitesse $\vec{v}$, de son accélération $\vec{a}$.

   c. En déduire les formules utilsées dans la question 2 .

Exercice 7 :

Un véhicule roule sur une autoroute à vitesse constante de 150 km/h ou la vitesse est limitée à 130 km/h. Un motard de la gendarmerie part à sa poursuite. Il démarre au moment précis ou le véhicule passe devant lui. Le motard atteint 100km/h en 10s.

1. Calculer la durée de la poursuite.

2. Quelle est la distance parcourue pendant la poursuite.

3. Quelle est la vitesse du motard lorsqu'il rattrape le véhicule.